

Дополнительные главы математики

Кожанов Александр Иванович

набрали: Сивых М.Г. (группа 6204)
Яковлев А.В. (группа 6204)
Никулин В.М. (группа 6203)

18 января 2011 г.

Содержание

1	Линейные ограниченные операторы в нормированных пространствах	3
2	Обратные операторы	17
3	Функционалы в нормированных пространствах	22
3.1	Сопряжённые операторы	26
3.2	Функционалы и слабая сходимос ть	27
4	Компактные множества в нормированных пространствах	30
4.1	Критерии относительной компактности в некоторых функциональных пространствах	38
5	Теория разрешимости функциональных уравнений	39
5.1	Уравнения с вполне непрерывными операторами	39
5.2	Уравнения Фредгольма	42
5.2.1	Уравнение Фредгольма первого рода	53
5.3	Метод малого параметра	54
5.3.1	Аналитический подход	54
5.3.2	Метод продолжения по параметру	56
5.4	Теорема Шаудера и следствия из нее	58
6	Самосопряжённые операторы. Спектр и резольвента.	61
6.1	Элементы спектральной теории	67
7	Топологические пространства и пространства сходимости.	77
7.1	Пространства сходимости (Фреше)	79
8	Дифференциальное исчисление в нормированных пространствах.	80
9	Метод Ньютона-Канторовича	84
10	Решения	89

1 Линейные ограниченные операторы в нормированных пространствах

Опр 1.1. Пусть X — некоторое непустое множество.

Функция $\rho(x, y) : X \times X \rightarrow \mathbb{R}_+$ называется метрикой, если $\forall x, y, z \in X$ выполняется:

1. $\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
2. $\rho(x, y) = \rho(y, x)$
3. $\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y)$

Пара (X, ρ) называется метрическим пространством.

Опр 1.2.

$B_R(x_0) = \{x \in X \mid \rho(x, x_0) < R\}$ — открытый шар.

$\overline{B}_R(x_0) = \{x \in X \mid \rho(x, x_0) \leq R\}$ — замкнутый шар.

$S_R(x_0) = \{x \in X \mid \rho(x, x_0) = R\}$ — сфера.

Опр 1.3. Последовательность $\{x_n\}$ сходится к x_0 , если числовая последовательность $\rho(x_n, x_0)$ стремится к нулю:

$$\rho(x_n, x_0) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Опр 1.4. Последовательность $\{x_n\}$ называется фундаментальной (сходящейся в себе), если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon) \mid \forall n > N, \forall m \geq 0 : \rho(x_n, x_{n+m}) < \varepsilon$$

Опр 1.5. Метрическое пространство называется полным, если любая фундаментальная последовательность имеет предел, принадлежащий этому же пространству.

Замечание 1.1. Пространство может быть полным по одной метрике и неполным по другой.

Опр 1.6. Множество X называется линейным (векторным) пространством над $\mathbb{R}(\mathbb{C})$, если в нём определены:

1. операция сложения:

$$\forall x, y \in X \text{ соответствующий элемент } (x + y) \in X$$

2. операция умножения на скаляр:

$$\forall x \in X \text{ и } \forall \lambda \in \mathbb{R}(\mathbb{C}) \text{ соответствующий элемент } (\lambda x) \in X$$

Причём $\forall x, y, z \in X$ и $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$ выполняется:

1. $x + y = y + x$
2. $(x + y) + z = x + (y + z)$
3. $\exists \theta \in X \mid x + \theta = \theta + x = x$
4. $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$

$$5. \lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$$

$$6. \lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x$$

$$7. 1 \cdot x = x$$

Замечание 1.2. Зачастую не будем делать различий между нулём θ пространства X и скалярным нулём.

Опр 1.7. *Линейное пространство X называется нормированным, если существует отображение $\|\cdot\| : X \rightarrow \mathbb{R}_+$, удовлетворяющее следующим условиям:*

$$1. \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \theta$$

$$2. \|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$$

$$3. \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

Замечание 1.3. Всякое нормированное пространство является метрическим с метрикой:

$$\rho(x, y) = \|x - y\|$$

Опр 1.8. *Нормированное пространство, являющееся полным по данной метрике ($\rho(x, y) = \|x - y\|$), называется банаховым пространством.*

В дальнейшем будем считать, что X, Y — линейные (векторные) пространства над $\mathbb{R}$ (другие случаи оговариваются специально).

Пусть $A : X \rightarrow Y$ — оператор (отображение).

Опр 1.9. *A называется линейным оператором, если выполняется:*

$$1. A(x_1 + x_2) = Ax_1 + Ax_2, \quad \forall x_1, x_2 \in X \text{ (аддитивность);}$$

$$2. A(\lambda x) = \lambda Ax, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall x \in X \text{ (однородность).}$$

Замечание 1.4. Область значений оператора A обозначается $R(A)$, а область определения — $D(A)$.

Пусть X, Y — нормированные пространства.

Опр 1.10. *Линейный оператор A называется ограниченным, если $\exists M = \text{const}, M \geq 0 \mid \forall x \in X : \|Ax\|_Y \leq M\|x\|_X$.*

Опр 1.11. *Оператор A называется непрерывным в точке x_0 , если для произвольной сходящейся в X последовательности $\{x_n\}$ выполняется:*

$$x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x_0 \implies Ax_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} Ax_0$$

Опр 1.12. *Оператор A называется непрерывным, если он непрерывен в каждой точке области определения.*

Замечание 1.5. Для непрерывности линейного оператора достаточно потребовать непрерывность в одной точке.

Теорема 1.1. *Линейный оператор $A : X \rightarrow Y$ непрерывен $\Leftrightarrow A$ ограничен.*

Упр 1.1. Доказать теорему 1.1. (см. стр. 89)

Опр 1.13. Нормой оператора A называется следующее число:

$$\|A\| = \inf\{M \mid \forall x \in X : \|Ax\|_Y \leq M\|x\|_X\}$$

Замечание 1.6.

1. Множество $\{M \mid \|Ax\| \leq M\|x\| \forall x \in X\}$ ограничено снизу, следовательно, точная нижняя грань существует.
2. Из определения: $\|Ax\| \leq \|A\| \cdot \|x\|$

Утв 1.1. Пусть A — линейный ограниченный оператор. Тогда:

1. $\|A\| = \sup_{\substack{x \in X \\ \|x\|_X = 1}} \|Ax\|_Y$
2. $\|A\| = \sup_{\substack{x \in X \\ \|x\|_X \neq 0}} \frac{\|Ax\|_Y}{\|x\|_X}$

Упр 1.2. Доказать утв. 1.1 (см. стр. 89)

Пусть X — метрическое пространство; $M, M_1 \subset X$.

Опр 1.14. M называется всюду плотным в M_1 , если $\overline{M} \supseteq M_1$.

Опр 1.15. Метрическое пространство называется сепарабельным, если оно имеет счётное всюду плотное подмножество.

Пример 1.1. $\mathbb{R}$ - сепарабельно.

Опр 1.16. M называется нигде не плотным в X , если $\forall x_0 \in X, r \in \mathbb{R} : \exists \tilde{x} \in X, \tilde{r} \in \mathbb{R} \mid B_{\tilde{r}}(\tilde{x}) \subset B_r(x_0), \text{ причём } B_{\tilde{r}}(\tilde{x}) \cap M = \emptyset$.

Пример 1.2. $\mathbb{Z}$ - нигде не плотно в $\mathbb{Q}$.

Теорема 1.2. Пусть X — полное метрическое пространство. $\{M_n\}$ — последовательность замкнутых множеств:

$$M_{n+1} \subset M_n \subset \dots \subset M_1 \subset M_0, \text{ причём} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \text{diam} M_n = 0, \text{ где } \text{diam} M_n = \sup_{x, y \in M_n} \rho(x, y).$$

Тогда $\exists! x \mid \forall n \in \mathbb{N} : x \in M_n$.

Доказательство. (В курсе лекций не приводилось)

Рассмотрим последовательность $\{x_n\}$ такую, что $\forall n \in \mathbb{N} : x_n \in M_n$.
Т.к. $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{diam} M_n = 0$, то $\forall \varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon) \mid \forall n > N, \forall p \geq 0 :$

$$\rho(x_n, x_{n+p}) < \varepsilon$$

Т.е. получаем, что $\{x_n\}$ — фундаментальная.

Пространство X является полным, следовательно, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x \in X$.

Зафиксируем число k и рассмотрим множество M_k . Имеем: $\forall p \geq 0$ $x_{k+p} \in M_k$. По условию множество M_k является замкнутым, следовательно, оно содержит в себе предел последовательности $\{x_{k+p}\}_{p \in \mathbb{N}}$, т.е. $\lim_{p \rightarrow \infty} x_{k+p} = x \in M_k$. В силу произвольности выбора k существование точки, принадлежащей всем множествам M_k , доказано.

Докажем единственность от противного. Пусть $\exists y \mid \forall n \in \mathbb{N} : y \in M_n$, $y \neq x$, т.е. $\rho(x, y) = \delta > 0$. Имеем:

$$\delta = \rho(x, y) \leq \rho(x, x_n) + \rho(x_n, y) \leq 2 \operatorname{diam} M_n$$

Переходя к пределу $n \rightarrow \infty$ приходим к противоречию ($0 < \delta \leq 0$).

□

Теорема 1.3. Пусть X — метрическое пространство, и пусть для любой последовательности замкнутых шаров $\{B_n\}$ из X таких, что

$$\dots \subset B_{n+1} \subset B_n \subset \dots \subset B_1 \text{ и } \lim_{n \rightarrow \infty} r_n = 0, \text{ где } r_n — \text{ радиус } B_n$$

выполняется:

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n \neq \emptyset$$

Тогда X — полное пространство.

Доказательство. (В курсе лекций не приводилось)

Пусть дана фундаментальная последовательность $\{x_n\} \subset X$.

Выберем n_k таким образом, что:

$$\rho(x_{n_k+p}, x_{n_k}) < \frac{1}{2^k} \quad \forall p \geq 0$$

Пусть $\overline{B_k} = B_{\frac{1}{2^{k-1}}}(x_{n_k})$. Тогда:

1. $\overline{B_{k+1}} \subset \overline{B_k}$. Действительно:

$$\begin{aligned} x \in \overline{B_{k+1}} &\Rightarrow \rho(x, x_{n_k}) \leq \rho(x, x_{n_{k+1}}) + \rho(x_{n_{k+1}}, x_{n_k}) \leq \\ &\leq \frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^{k-1}} \Rightarrow x \in \overline{B_k} \end{aligned}$$

2. $\lim_{k \rightarrow \infty} r_k = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{2^{k-1}} = 0$

По условию теоремы $\exists x_0 \mid \forall k : x_0 \in \overline{B_k}$. Покажем, что $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x_0$.

Т.к. $\forall k : x_{n_k}, x_0 \in \overline{B_k}$, то

$$\rho(x_{n_k}, x_0) \leq \frac{1}{2^{k-1}} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$$

Отсюда

$$\rho(x_n, x_0) \leq \rho(x_n, x_{n_k}) + \rho(x_{n_k}, x_0) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$$

□

Опр 1.17. Метрическое пространство X называется пространством 1-ой категории, если $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} M_n$, где M_n — нигде не плотное в X множество $\forall n$.

Опр 1.18. Метрическое пространство X называется пространством 2-ой категории, если оно не является пространством 1-ой категории.

Теорема 1.4. Любое полное метрическое пространство является пространством 2-ой категории.

Доказательство. От противного.

Пусть X представимо в виде $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} M_n$, где M_n — нигде не плотное в X множество $\forall n$.

Возьмём шар $B_1(x_0)$ единичного радиуса с центром в точке $x_0 \in X$. Поскольку множество M_1 нигде не плотно в X , то:

$$\begin{aligned} & \exists R_1 \in \mathbb{R}, R_1 > 0, \exists x_1 \in X \mid \\ & B_{R_1}(x_1) \subset B_1(x_0) \text{ и } B_{R_1}(x_1) \cap M_1 = \emptyset. \end{aligned}$$

Считаем, что $R_1 < \frac{1}{2}$ (иначе его можно уменьшить). Далее, поскольку множество M_2 нигде не плотно в X , получаем:

$$\begin{aligned} & \exists R_2 \in \mathbb{R}, R_2 > 0, \exists x_2 \in X \mid \\ & B_{R_2}(x_2) \subset B_{R_1}(x_1) \text{ и } B_{R_2}(x_2) \cap M_2 = \emptyset, \end{aligned}$$

заметим, что поскольку $B_{R_1}(x_1) \cap M_1 = \emptyset$, то и $B_{R_2}(x_2) \cap M_1 = \emptyset$. Считаем, что $R_2 < \frac{1}{4}$.

По аналогии строим шары $\{B_{R_n}(x_n)\}$, такие что:

$$\dots \subset B_{R_{n+1}}(x_{n+1}) \subset B_{R_n}(x_n) \subset \dots,$$

где $R_n < \frac{1}{2^n}$, (т.е. $R_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$) и $\forall n$ выполняется, что $B_{R_n}(x_n)$ не содержит точек из $M_1, \dots, M_n$.

Тогда по теореме 1.2 $\exists x^* \forall n \in \mathbb{N} : x^* \in B_{R_n}(x_n)$. Но $x^* \notin M_n \forall n \Rightarrow x^* \notin X$, что противоречит полноте пространства X .

□

Опр 1.19. Метрические пространства X и Y изометричны, если существует такое отображение $\mathcal{J} : X \rightarrow Y$, для которого выполняется:

1. $\mathcal{J}(x_1) = \mathcal{J}(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$
2. $\forall y \in Y \exists x \in X \mid y = \mathcal{J}(x)$
3. $\forall x_1, x_2 \in X : \rho_X(x_1, x_2) = \rho_Y(\mathcal{J}(x_1), \mathcal{J}(x_2))$

Т.е. изометрия — это такая биекция, которая сохраняет расстояние между соответствующими элементами.

Теорема 1.5 (О пополнении). Для любого метрического пространства X с метрикой ρ существует метрическое пространство (Y, ρ_1) такое, что

1. Y — полное
2. $\exists Y_1$ - подпространство $Y \mid Y_1$ всюду плотно в Y (т.е. $\overline{Y_1} = Y$)
3. X и Y_1 изометричны

Доказательство. Введём отношение эквивалентности.

Две последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ назовём эквивалентными, если $\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(x_n, y_n) = 0$.

Имеем свойство:

$$|\rho(x_n, y_n) - \rho(x_m, y_m)| \leq \rho(x_n, x_m) + \rho(y_n, y_m) \quad (\star)$$

Упр 1.3. Доказать свойство $(\star)$. (См. стр. 89)

Т.е. если $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ — фундаментальные последовательности, то $\rho(x_n, y_n)$ — фундаментальная числовая последовательность. Таким образом, получаем, что предел $\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(x_n, y_n)$ существует и конечен.

Положим Y — пространство классов эквивалентности последовательностей, каждая из которых фундаментальная в X .

Пусть $\rho_1(x^*, y^*) = \lim_{n \rightarrow \infty} \rho(x_n, y_n)$ (определение корректно в силу указанного выше свойства), где последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ — это представители x^*, y^* .

Имеем утверждения:

1. ρ_1 - метрика.

Упр 1.4. Доказать, что ρ_1 - метрика (Проверить аксиомы метрики). (См. стр. 90)

2. Величина $\rho_1(x^*, y^*)$ не зависит от выбора представителя x^* и y^* , т.к.
 $|\rho(x_n, y_n) - \rho(x'_n, y'_n)| \leq \rho(x_n, x'_n) + \rho(y_n, y'_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, поскольку
 $\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(x_n, x'_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \rho(y_n, y'_n) = 0$.
Здесь $\{x_n\}$ и $\{x'_n\}$ — представители x^* , а $\{y_n\}$ и $\{y'_n\}$ — представители y^*

Таким образом, получаем, что Y — пространство с метрикой.

Пусть Y_1 состоит из всех классов $x^* \in Y$, среди последовательностей которых имеется стационарная последовательность:

$x^* \in Y_1$, если y x^* есть представитель вида: $(x, x, x, \dots, x, \dots)$, $x \in X$.

Y_1 — подпространство Y .

Y_1 изометрично X , где изометрия задаётся по правилу:

$$f : x \rightarrow (x, x, x, \dots, x, \dots) \in x^*$$

(по элементу x строится стационарная последовательность). Т.к. в классе x^* может быть только одна стационарная последовательность, то данное отображение является взаимно однозначным.

Причём, если $\{x, x, \dots\} \in x^*$, $\{y, y, \dots\} \in y^*$, то:

$$\rho_1(x^*, y^*) = \lim \rho(\{x\}, \{y\}) = \rho(x, y)$$

Таким образом, третий пункт теоремы доказан.

Докажем, что Y_1 плотно в Y . Возьмём $x^* \in Y$, $x^* = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$. Построим последовательность элементов из Y_1 :

$$x_n^* = (x_n, x_n, \dots, x_n, \dots)$$

Очевидно, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \rho_1(x^*, x_n^*) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{m \rightarrow \infty} \rho(x_n, x_m) = 0$$

Тогда получаем, что Y_1 плотно в Y . Вторым пунктом теоремы доказан.

Осталось показать, что пространство Y является полным. Докажем это двумя способами: с и без использования уже доказанных пунктов 2 и 3.

I. С использованием пунктов 2 и 3. Выберем для этого в Y фундаментальную последовательность $\{x_n^*\}$. По доказанному выше (Y_1 плотно в Y), для каждого элемента x_m^* существует последовательность $\{x_n^{(m)}\}$ элементов пространства Y_1 , сходящаяся к x_m^* :

$$\rho_1(x_n^{(m)}, x_m^*) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Положим $\tilde{x}_n = x_n^{(n)} \in Y_1$. Из изометрии пространств X и Y_1 следует, что существует последовательность $\{x_n\}$ элементов пространства X , соответствующая последовательности $\{\tilde{x}_n\}$ элементов пространства Y_1 . Поскольку последовательность $\{\tilde{x}_n\}$ фундаментальная (приближает фундаментальную последовательность $\{x_n^*\}$), то получаем, что последовательность $\{x_n\}$ также является фундаментальной.

Обозначим через x^* класс с представителем $\{x_n\}$, $x^* \in Y$. Имеем:

$$\rho_1(x_n^*, x^*) \leq \rho_1(x_n^*, \tilde{x}_n) + \rho_1(\tilde{x}_n, x^*) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0, \text{ поскольку}$$

- 1) $\rho_1(x_n^*, \tilde{x}_n) \rightarrow 0$, т.к. Y_1 всюду плотно в Y .
- 2) $\rho_1(\tilde{x}_n, x^*) \rightarrow 0$, т.к. Y_1 изометрично X и в силу выбора x^* .

Таким образом, получили, что предел фундаментальной последовательности из Y принадлежит Y . Т.е. Y — полное пространство.

II. Без использования пунктов 2 и 3. Пусть $\{x_n^*\}$ — фундаментальная последовательность элементов Y , т.е. $\rho_1(x_n^*, x_m^*) \xrightarrow{n, m \rightarrow \infty} 0$. В каждом классе x_n^* выберем представителя, т.е. фундаментальную последовательность $\{x_n^{(n)}\}$.

Поскольку $\{x_n^{(n)}\}$ — фундаментальная, то:

$$\forall n \exists k_n \mid \rho(x_p^{(n)}, x_{k_n}^{(n)}) < \frac{1}{n} \text{ при } p > k_n. \quad (1)$$

Рассмотрим последовательность $\{x_{k_1}^{(1)}, x_{k_2}^{(2)}, \dots\}$. Покажем, что она фундаментальная. Имеем:

$$\rho(x_{k_n}^{(n)}, x_{k_m}^{(m)}) \leq \rho(x_{k_n}^{(n)}, x_p^{(n)}) + \rho(x_p^{(n)}, x_p^{(m)}) + \rho(x_p^{(m)}, x_{k_m}^{(m)}).$$

Выберем $\varepsilon > 0$. Т.к. $\rho_1(x_n^*, x_m^*) \xrightarrow{n, m \rightarrow \infty} 0$, то $\exists n_0 \mid \forall n \geq n_0, m \geq n_0, :$

$$\rho_1(x_n^*, x_m^*) = \lim_{p \rightarrow \infty} \rho(x_p^{(n)}, x_p^{(m)}) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Поэтому, при достаточно больших p и $m, n \geq n_0$:

$$\rho(x_p^{(n)}, x_p^{(m)}) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

При этом можно считать, что $\frac{1}{n_0} < \frac{\varepsilon}{4}$.

Зафиксируем m, n так, чтобы выполнялось $m, n > n_0$ и выберем p настолько большим, чтобы $p > k_m, p > k_n$. Тогда из (1) следует:

$$\begin{aligned}\rho(x_p^{(n)}, x_{k_n}^{(n)}) &< \frac{1}{n} < \frac{\varepsilon}{4}; \\ \rho(x_p^{(m)}, x_{k_m}^{(m)}) &< \frac{1}{m} < \frac{\varepsilon}{4}.\end{aligned}$$

В итоге получаем, что:

$$\rho(x_{k_n}^{(n)}, x_{k_m}^{(m)}) < \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{4} = \varepsilon$$

Т.е. $\{x_{k_n}^{(n)}\}$ — фундаментальная.

Обозначим через x^* класс эквивалентности, содержащий фундаментальную последовательность $\{x_{k_n}^{(n)}\}$. Покажем, что $x_n^* \rightarrow x^*$.

Имеем:

$$\begin{aligned}\rho_1(x_n^*, x^*) &= \lim_{p \rightarrow \infty} \rho(x_p^{(n)}, x_{k_p}^{(p)}); \\ \rho(x_p^{(n)}, x_{k_p}^{(p)}) &\leq \rho(x_p^{(n)}, x_{k_n}^{(n)}) + \rho(x_{k_n}^{(n)}, x_{k_p}^{(p)}) < \frac{1}{n} + \rho(x_{k_n}^{(n)}, x_{k_p}^{(p)})\end{aligned}$$

Поскольку $\{x_{k_n}^{(n)}\}$ — фундаментальная, то для заданного $\varepsilon > 0 \exists n_0$ такой, что при $p, n \geq n_0$ выполняется:

$$\rho(x_{k_n}^{(n)}, x_{k_p}^{(p)}) < \frac{\varepsilon}{2}$$

Тогда при $n \geq n_0$ имеем:

$$\begin{aligned}\rho_1(x_n^*, x^*) &= \lim_{p \rightarrow \infty} \rho(x_p^{(n)}, x_{k_p}^{(p)}) < \frac{1}{n} + \frac{\varepsilon}{2} \leq \\ &\leq \frac{1}{n_0} + \frac{\varepsilon}{2} < \left(\text{без ограничения общности считаем, что } \frac{1}{n_0} < \frac{\varepsilon}{2} \right) < \varepsilon.\end{aligned}$$

Таким образом, показали, что $x_n^* \rightarrow x^*$ при $n \rightarrow \infty$, т.е. пространство Y — полное. □

(Лекция №2, 13.09.2010)

X, Y — нормированные пространства. A — линейный оператор, не обязательно ограниченный. Обозначим:

$$X_n = \{x \in X \mid \|Ax\|_Y \leq n\|x\|_X\}$$

Лемма 1.1. Пусть X — банахово пространство. A — линейный оператор.

Тогда X представимо в виде $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$, причём хотя бы одно X_n всюду плотно в X .

Доказательство. Заметим, что каждое $X_n \neq \emptyset$, т.к. $\forall n : \theta \in X_n$.

Далее, для любого ненулевого фиксированного $x \in X$ соотношение $\frac{\|Ax\|}{\|x\|}$ является конечной величиной $\Rightarrow \exists n \in \mathbb{N} \mid \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \leq n \Rightarrow x \in X_n$.

Следовательно, $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$.

По теореме 1.4 полное метрическое пространство не может быть счётным (конечным) объединением нигде не плотных множеств $\Rightarrow \exists n_0 \mid X_{n_0}$ не является нигде не плотным, что означает:

$$\begin{aligned} \exists x_0, R_0 > 0 \mid \forall x, r > 0, B_r(x) \subset B_{R_0}(x_0) : \\ B_r(x) \cap X_{n_0} \neq \emptyset. \end{aligned}$$

Отсюда получаем, что $B_{R_0}(x_0) \cap X_{n_0}$ — всюду плотно в $B_{R_0}(x_0)$.

Рассмотрим шар $B_{R_1}(x_1)$ такой, что $\overline{B_{R_1}(x_1)} \subset B_{R_0}(x_0)$, где $x_1 \in X_{n_0}$. Выберем такой x , что $\|x\| = R_1$. Элемент $x + x_1 \in B_{R_1}(x_1)$, т.к.

$$\|x + x_1 - x_1\| = R_1$$

Можем также считать, что

$$\overline{B_{R_1}(x_1)} \subset \overline{X_{n_0}}$$

Следовательно, $\exists \{z_k\}$ — последовательность элементов из $B_{R_1}(x_1) \cap X_{n_0}$ такая, что $z_k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} x + x_1$.

Положим $\tilde{x}_k = z_k - x_1$. Очевидно, что $\tilde{x}_k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} x$, при этом $\|\tilde{x}_k\| \leq R_1$. Можем считать, что для любого k (лишние отбросим) верно следующее:

$$\frac{R_1}{2} \leq \|\tilde{x}_k\| \leq R_1$$

Напомним, что $z_k, x_1 \in X_{n_0}$.

Верна оценка:

$$\begin{aligned} \|A\tilde{x}_k\| &= \|Az_k - Ax_1\| \leq \|Az_k\| + \|Ax_1\| \leq n_0(\|z_k\| + \|x_1\|) \leq \\ &\leq n_0(2\|x_1\| + \|\tilde{x}_k\|) \leq \frac{2n_0(R_1 + 2\|x_1\|)}{R_1} \cdot \|\tilde{x}_k\| \end{aligned}$$

Можно выбрать наименьшее натуральное n такое, что:

$$\frac{2n_0(R_1 + 2\|x_1\|)}{R_1} \leq n \quad \begin{aligned} x_1 - \text{фиксированное} &\Rightarrow \\ &\Rightarrow \|x_1\| = \text{const} \end{aligned}$$

Отсюда: $\|A\tilde{x}_k\| \leq n\|\tilde{x}_k\| \Rightarrow \tilde{x}_k \in X_n$. Тем самым мы доказали, что каждый элемент x такой, что $\|x\| = R_1$ аппроксимируется элементами из множества X_n .

Пусть теперь x — произвольный элемент из X . Положим:

$$y = \frac{R_1}{\|x\|} \cdot x$$

Очевидно, что $\|y\| = R_1$. Найдётся последовательность $\{y_k\}, y_k \in X_n$ такая, что $y_k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} y$. Положим:

$$x_k = y_k \frac{\|x\|}{R_1} \quad \Rightarrow \quad x_k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} x$$

Получаем:

$$\|Ax_k\| = \frac{\|x\|}{R_1} \|Ay_k\| \leq \frac{n\|x\|}{R_1} \|y_k\| = n\|x_k\|$$

Это означает, что $x_k \in X_n$. Таким образом, X_n всюду плотно в X . □

Опр 1.20. Пусть X — линейное пространство, $L \subset X$, $L \neq \emptyset$. L называется линейным многообразием, если $\forall x_1 \dots x_n \in L, \forall \alpha_1 \dots \alpha_n \in \mathbb{R}$:

$$\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n \in L$$

Замечание 1.7. Если L — линейное многообразие в X , то $\theta_X \in L$.

Опр 1.21. Пусть X — нормированное пространство, $M \subset X$ и пусть задан оператор $A : M \rightarrow Y$. Оператор $\tilde{A} : X \rightarrow Y$ называется продолжением оператора A с M на X , если выполняется:

$$\tilde{A}|_M = A$$

Теорема 1.6. Пусть X, Y — нормированные пространства, L — линейное многообразие в X , L всюду плотно в X , Y — банахово. Пусть задан $A : X \rightarrow Y$ — линейный ограниченный оператор, $D(A) = L$.

Тогда оператор A можно продолжить на всё X без увеличения нормы, т.е. $\exists \tilde{A}$ такой, что $\tilde{A}|_L = A$, $\|\tilde{A}\| = \|A\|$ и $D(\tilde{A}) = X$.

Доказательство. (В курсе лекций не приводилось)

Выберем произвольный элемент $x \in X \setminus L$. Т.к. L всюду плотно в X , то $\exists x_n \in L$ такая, что $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x$. Определим оператор $\tilde{A}$:

$$\tilde{A}x = \begin{cases} \lim_{n \rightarrow \infty} Ax_n, & \text{если } x \notin L \\ Ax, & \text{иначе} \end{cases}$$

Очевидно, что $\tilde{A}|_L = A$, значит $\tilde{A}$ — продолжение A .

Возникает вопрос о корректности определения $\tilde{A}$. Рассмотрим другую последовательность $\{x'_n\} \subset L$ такую, что $\lim_{n \rightarrow \infty} x'_n = x$.

Очевидно, что $(x'_n - x_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$. Тогда:

$$\|A(x'_n - x_n)\| = \|Ax'_n - Ax_n\| \leq \|A\| \cdot \|x'_n - x_n\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Последовательность $\{Ax_n\}$ фундаментальна, т.к.

$$\|Ax_n - Ax_m\| = \|A(x_n - x_m)\| \leq \|A\| \cdot \|x_n - x_m\| \xrightarrow{n, m \rightarrow \infty} 0$$

Пространство Y является банаховым, значит определены пределы фундаментальных последовательностей: $y = \lim_{n \rightarrow \infty} Ax_n$ и $y' = \lim_{n \rightarrow \infty} Ax'_n$

Покажем, что $y' = y$:

$$Ax'_n - y = (Ax'_n - Ax_n) + (Ax_n - y) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Значит $y = \lim_{n \rightarrow \infty} Ax'_n = y'$ и предел не зависит от выбора последовательности x_n . Линейность $\tilde{A}$ очевидна — в силу свойства линейности предела. Докажем равенство норм A и $\tilde{A}$.

$$\begin{aligned}\|\tilde{A}x\| &= \left\| \lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{A}x_n \right\| = (\text{норма — непрерывная функция}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \|\tilde{A}x_n\| = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \|Ax_n\| \leq \|A\| \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n\| = \|A\| \cdot \|x\| \Rightarrow \|\tilde{A}\| \leq \|A\| \\ \|A\| &= \sup_{\substack{x \in L \\ \|x\|=1}} \|Ax\| = \sup_{\substack{x \in L \\ \|x\|=1}} \|\tilde{A}x\| \leq \sup_{\substack{x \in X \\ \|x\|=1}} \|\tilde{A}x\| = \|\tilde{A}\|\end{aligned}$$

В итоге: $\|A\| = \|\tilde{A}\|$. Отсюда следует ограниченность $\tilde{A}$. □

Опр 1.22. Через $\mathcal{L}(X, Y)$ обозначим пространство линейных ограниченных операторов, действующих из X в Y .

Теорема 1.7. Если Y — банахово, то $\mathcal{L}(X, Y)$ является банаховым пространством с нормой $\|A\|$.

Доказательство. (В курсе лекций не приводилось)

Докажем, что $\mathcal{L}(X, Y)$ — линейное нормированное пространство.

$$(A + B)x = Ax + Bx; \quad (\lambda A)x = \lambda(Ax)$$

1. $A + B$ и λA — ограничены
2. Выполняются аксиомы линейного пространства
3. Выполняются аксиомы нормы (из свойств $\|A\|$)

Осталось показать полноту $\mathcal{L}(X, Y)$. Пусть $\{A_n\} \subset \mathcal{L}(X, Y)$ — фундаментальная по операторной норме последовательность. Нужно показать, что $\exists A \in \mathcal{L}(X, Y)$ такой, что $\|A_n - A\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

Пусть $x \in X$ — произвольный элемент.

Рассмотрим $\{A_n x\}$. Покажем, что эта последовательность фундаментальна:

$$\|A_n x - A_m x\| = \|(A_n - A_m)x\| \leq \|A_n - A_m\| \cdot \|x\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Обозначим $y_n = A_n x$. Таким образом, $\{y_n\}$ фундаментальна в Y . Пространство Y банахово, следовательно, $\exists! y \in Y$ такой, что $y = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$

Определим оператор A по следующему правилу:

$$Ax = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n x = y$$

Т.е. каждому $x \in X$ соответствует $y \in Y$. Оператор A линеен в силу свойств линейности предела и линейности операторов A_n .

Докажем ограниченность A :

Рассмотрим числовую последовательность $\{\|A_n\|\}$. Имеем:

$$\begin{aligned}\|A_n\| &= \|A_n - A_m + A_m\| \leq \|A_n - A_m\| + \|A_m\| \Rightarrow \\ \|A_n - A_m\| &\xrightarrow{n, m \rightarrow \infty} 0 \Rightarrow \| \|A_n\| - \|A_m\| \| \xrightarrow{n, m \rightarrow \infty} 0\end{aligned}$$

Получаем, что $\{\|A_n\|\}$ фундаментальна $\Rightarrow \{\|A_n\|\}$ ограничена, т.е. $\exists M$ такое, что $\forall n : \|A_n\| \leq M$

Имеем:

$$\begin{aligned}\|Ax\| &= \left\| \lim_{n \rightarrow \infty} A_n x \right\| = (\text{в силу непрерывности нормы}) = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \|A_n x\| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \|A_n\| \cdot \|x\| \leq M\|x\| \Rightarrow A - \text{ограничен}\end{aligned}$$

Осталось показать сходимость в операторной норме:

$$\|A_n - A\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|(A_n - A)x\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|A_n x - Ax\|$$

Т.к. $\{A_n x\}$ фундаментальна, то:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 = n_0(\varepsilon) \mid \forall n > n_0, \forall p > 0 : \|A_{n+p}x - A_n x\| < \varepsilon$$

Перейдём к пределу $p \rightarrow \infty$:

$$\begin{aligned}\|Ax - A_n x\| &\leq \varepsilon \text{ для произвольного элемента } x \Rightarrow \\ &\Rightarrow \sup_{\|x\| \leq 1} \|Ax - A_n x\| \leq \varepsilon\end{aligned}$$

Тогда:

$$\|A_n - A\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \Rightarrow A_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} A \text{ в операторной норме}$$

Следовательно, $\mathcal{L}(X, Y)$ - полное. В итоге получаем, что $\mathcal{L}(X, Y)$ - банахово. □

Лемма 1.2. Пусть X, Y — нормированные пространства, и пусть заданы операторы $A, A_n \in \mathcal{L}(X, Y)$.

Тогда, если $\|A - A_n\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, то $A_n x \xrightarrow{n \rightarrow \infty} Ax$ равномерно на любом шаре $\overline{B_R}(0)$.

Доказательство. Имеем:

$$\|A - A_n\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \mid \forall n \geq n_0 : \|A_n - A\| < \frac{\varepsilon}{R}$$

Тогда:

$$\begin{aligned}\|A_n x - Ax\| &\leq \|A_n - A\| \cdot \|x\| < \frac{\varepsilon}{R} \|x\| \leq \\ &\leq (\|x\| \leq R \text{ в шаре } \overline{B_R}(0)) \leq \varepsilon\end{aligned}$$

□

Замечание 1.8. Сходимость по норме $\equiv$ равномерная сходимость.

Опр 1.23. Пусть $A_n \in \mathcal{L}(X, Y) \forall n$. Последовательность A_n сходится к линейному оператору A поточечно, если $\forall x \in X : A_n x \xrightarrow{n \rightarrow \infty} Ax$ в пространстве Y .

Замечание 1.9. Из сходимости по норме следует поточечная сходимость. Обратное неверно.

Пример 1.3. Пусть H — бесконечномерное гильбертово пространство. Пусть $\{e_n\}$ — счётный ортонормированный базис. Понятно, что $\forall x \in H$:

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} (x, e_i) e_i$$

Обозначим через A_n операторы проектирования на $\overline{\text{span}\{e_1, \dots, e_n\}}$, где span — линейная оболочка $e_1, \dots, e_n$ (подпространство с таким базисом). Тогда:

$$A_n x = \sum_{i=1}^n (x, e_i) e_i$$

Очевидно, что $A_n \rightarrow I$ поточечно (I — единичный оператор), но:

$$\|A_n e_{n+1} - I e_{n+1}\| = \|A_n e_{n+1} - e_{n+1}\| = \|\theta - e_{n+1}\| = \|e_{n+1}\| = 1$$

Теорема 1.8. Пусть X, Y — банаховы пространства. Тогда $\mathcal{L}(X, Y)$ — банахово относительно поточечной сходимости.

Доказательство. См. после доказательства теоремы 1.9.

Теорема 1.9 (Банаха-Штейнхауза). Пусть X — банахово пространство, и пусть задана последовательность операторов $\{A_n\}$ такая, что $\forall n : A_n \in \mathcal{L}(X, Y)$ и $\{A_n\}$ сходится поточечно. Тогда последовательность $\{\|A_n\|\}$ ограничена.

Доказательство. Предположим противное: $\{\|A_n\|\}$ неограничена.

Тогда последовательность $\{\|A_n x\|\}$ неограничена на любом замкнутом шаре $\overline{B_\varepsilon}(x_0)$, $x_0 \in X$. Если это не так (т.е. $\{\|A_n x\|\}$ ограничена на некотором шаре), то

$$\exists \varepsilon > 0, x_0 \in X \mid \|A_n x\| < k \quad \forall x \in \overline{B_\varepsilon}(x_0).$$

Тогда для любого $y \in X$ выполняется:

$$x = \left(x_0 + \frac{\varepsilon}{\|y\|} y \right) \in \overline{B_\varepsilon}(x_0)$$

Действительно, распишем норму:

$$\|x - x_0\| = \left\| x_0 + \frac{\varepsilon}{\|y\|} y - x_0 \right\| = \left\| \frac{\varepsilon}{\|y\|} y \right\| = \varepsilon \frac{\|y\|}{\|y\|} = \varepsilon$$

Оценим:

$$\|A_n y\| = \frac{\|y\|}{\varepsilon} \|A_n x - A_n x_0\| < \frac{\|y\|}{\varepsilon} (\|A_n x_0\| + k)$$

Т.к. x_0 — фиксированный элемент и $\{A_n x_0\}$ сходится по условию, то $\exists C = \text{const} \mid \|A_n y\| \leq C \|y\|$, что противоречит предположению об неограниченности последовательности $\{\|A_n\|\}$.

Таким образом, $\{A_n x\}$ должна быть неограничена на любом шаре. Пусть $x_0 \in X$, $\varepsilon_0 > 0 \mid \{A_n x\}$ неограничена в $\overline{B_{\varepsilon_0}}(x_0)$.

- Из неограниченности следует, что $\exists n_1 \in \mathbb{N}, x_1 \in \overline{B_{\varepsilon_0}}(x_0)$ такие, что выполняется: $\|A_{n_1} x_1\| > 1$.

- Из непрерывности оператора A_{n_1} следует, что $\exists \varepsilon_1 > 0$ такое, что $\overline{B_{\varepsilon_1}}(x_1) \subset \overline{B_{\varepsilon_0}}(x_0)$ и при этом

$$\forall x \in \overline{B_{\varepsilon_1}}(x_1) : \|A_{n_1}x\| > \frac{1}{2}$$

Далее, $\exists n_2 \in \mathbb{N}, x_2 \in \overline{B_{\varepsilon_1}}(x_1), \varepsilon_2 > 0$ такие, что:

$$\begin{aligned} \|A_{n_2}x_2\| &> 2; \\ \overline{B_{\varepsilon_2}}(x_2) &\subset \overline{B_{\varepsilon_1}}(x_1); \\ \forall x \in \overline{B_{\varepsilon_2}}(x_2) : \|A_{n_2}x\| &> \frac{2}{2} = 1. \end{aligned}$$

Продолжая по аналогии получаем:

$$\dots \subset \overline{B_{\varepsilon_k}}(x_k) \subset \overline{B_{\varepsilon_{k-1}}}(x_{k-1}) \subset \dots$$

При этом $\lim_{k \rightarrow \infty} \varepsilon_k = 0$ и

$$\begin{aligned} \|A_{n_k}x_k\| &> k; \\ \forall x \in \overline{B_{\varepsilon_k}}(x_k) : \|A_{n_k}x\| &> \frac{k}{2} \quad \left(\begin{array}{l} \text{в силу неограниченности} \\ \text{на любом шаре.} \end{array} \right) \end{aligned}$$

По теореме 1.2 $\exists! \tilde{x} \mid \forall k : \tilde{x} \in \overline{B_{\varepsilon_k}}(x_k)$. Имеем:

$$\|\tilde{x} - x_k\| < \varepsilon_k, \quad \text{т.к. } \tilde{x}, x_k \in \overline{B_{\varepsilon_k}}(x_k)$$

Т.к. $\varepsilon_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$, то получаем, что $\tilde{x} = \lim_{k \rightarrow \infty} x_k$. При этом $\tilde{x} \in \overline{B_{\varepsilon_k}}(x_k)$, т.е. $\|A_{n_k}\tilde{x}\| > \frac{k}{2}$. Это противоречит условию поточечной сходимости последовательности $\{A_n\}$. □

Замечание 1.10. В теореме 1.9 вместо требования поточечной сходимости можно требовать ограниченность последовательности $\{\|A_n x\|\} \forall x \in X$.

Доказательство теоремы 1.8. A_n — последовательность поточечно сходящихся операторов из $\mathcal{L}(X, Y)$.

Положим $Ax = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n x$. Достаточно показать, что A — линейен и ограничен.

▷ Линейность очевидна (из свойств A_n и свойств $\lim$)

▷ Ограниченность следует из теоремы 1.9 □

Теорема 1.10. Пусть X, Y — банаховы пространства. $A_n, A \in \mathcal{L}(X, Y)$. Тогда $A_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} A$ поточечно $\Leftrightarrow$

1. Последовательность $\{\|A_n\|\}$ ограничена;
2. $A_n \rightarrow A$ поточечно на линейном многообразии всюду плотном в X при $n \rightarrow \infty$.

Доказательство. (В курсе лекций не приводилось)

($\Rightarrow$)

1) Следует из теоремы 1.9.

2) Очевидно. В качестве линейного многообразия взять само X .

($\Leftarrow$) Пусть $M = \sup_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}} \|A_n\|$, где $A_0 = A$. Обозначим через L линейное многообразие из пункта 2 теоремы.

Пусть $x' \in X \setminus L$ и выберем $\varepsilon > 0$. L всюду плотно в X , следовательно:

$$\exists x \in L \mid \|x' - x\| < \frac{\varepsilon}{4M}$$

Имеем:

$$\begin{aligned} \|A_n x' - A x'\| &\leq \|A_n x' - A_n x\| + \|A_n x - A x\| + \|A x - A x'\| \leq \\ &\leq \|A_n x - A x\| + (\|A_n\| + \|A\|) \|x' - x\| < \\ &< \|A_n x - A x\| + (M + M) \frac{\varepsilon}{4M} = \|A_n x - A x\| + \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned}$$

По условию: $\forall x \in L : A_n x \xrightarrow{n \rightarrow \infty} A x \Rightarrow$

$$\exists n_0 \mid \forall n \geq n_0 : \|A_n x - A x\| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Отсюда для $\forall n \geq n_0$:

$$\|A_n x' - A x'\| < \|A_n x - A x\| + \frac{\varepsilon}{2} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Таким образом, показали поточечную сходимость $A_n \rightarrow A$ на $X \setminus L$. В итоге, получаем, что $A_n \rightarrow A$ поточечно на всём X .

□

(Лекция №3, 20.09.2010)

2 Обратные операторы

Замечание 2.1. По умолчанию будем считать, что X — банахово пространство, а операторы — линейные (иные случаи будут оговариваться специально).

Пусть X, Y — линейные пространства.

$A : X \rightarrow Y$ — линейный оператор.

Опр 2.1. Оператор B_1 такой, что выполняется $B_1 A x = x \ \forall x \in X$ называется левым обратным. Заметим, что $B_1 : Y \rightarrow X$.

Оператор B_2 такой, что выполняется $A B_2 y = y \ \forall y \in Y$ называется правым обратным. Заметим, что $B_2 : Y \rightarrow X$.

Если $B = B_1 = B_2$, то B называется обратным, а оператор A обратимым. Будем обозначать $B = A^{-1}$.

Утв 2.1. Пусть A — линейный оператор, $B = A^{-1}$. Тогда B — линейен.

Упр 2.1. Доказать утв. 2.1 (см. стр. 90)

Утв 2.2. Если $A : X \xrightarrow{\text{на}} Y$, A — взаимно однозначный оператор, то A обратим.

Упр 2.2. Доказать утв. 2.2 (см. стр. 90)

Теорема 2.1. Пусть A — линейный оператор: $X \xrightarrow{\text{на}} Y$, где X, Y — нормированные пространства, и $\forall x \in X$:

$$\|Ax\| \geq m\|x\|, \text{ где } m > 0 \text{ — фиксированное число}$$

Тогда A обратим, и $A^{-1} \in \mathcal{L}(X, Y)$.

Доказательство. (В курсе лекций не приводилось)

Пусть $Ax_1 = y$ и $Ax_2 = y$. Тогда $A(x_1 - x_2) = 0$. Имеем:

$$m\|x_1 - x_2\| \leq \|A(x_1 - x_2)\| = 0 \Rightarrow x_1 = x_2$$

Тогда получаем, что A — взаимно однозначный, следовательно, по утверждению 2.2 оператор A обратим.

Оператор A линеен $\Rightarrow$ (по утверждению 2.1) A^{-1} также является линейным. Покажем ограниченность:

$$\|A^{-1}y\| \leq \frac{1}{m}\|AA^{-1}y\| = \frac{1}{m}\|y\| \quad \forall y \in Y.$$

□

Утв 2.3. Для любых L и $M \in \mathcal{L}(X, X)$ верно:

$$\|LM\| \leq \|L\| \cdot \|M\|$$

Доказательство. Имеем:

$$\|LMx\| \leq \|L\| \cdot \|Mx\| \leq \|L\| \cdot \|M\| \cdot \|x\| \quad \forall x \in X$$

Отсюда следует требуемое. □

Теорема 2.2. Пусть $A \in \mathcal{L}(X)$, где X — банахово пространство, причём $\|A\| < 1$.

Тогда существуют $(I + A)^{-1}$, $(I - A)^{-1} \in \mathcal{L}(X)$, где I — единичный оператор.

Обозначение: $\mathcal{L}(X) = \mathcal{L}(X, X)$.

Доказательство. (В курсе лекций не приводилось)

Рассмотрим формальный операторный ряд:

$$I - A + A^2 - A^3 + \dots + (-1)^n A^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n A^n$$

Сходимость любого ряда — это сходимость частичных сумм. Рассмотрим частичную сумму:

$$S_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k A^k$$

Это уже корректное понятие, ограниченный линейный оператор. Покажем, что $\{S_n\}$ — фундаментальная в операторной норме:

$$\|S_{n+p} - S_n\| = \|(-1)^{n+p}A^{n+p} + \dots + (-1)^{n+1}A^{n+1}\| \leq \|A^{n+p}\| + \dots + \|A^{n+1}\|$$

По утверждению 2.3: $\|A^n\| \leq \|A\|^n$.

По условию, $\|A\| < 1$, тогда $\exists q \in \mathbb{R} \mid \|A\| \leq q < 1$. Получаем:

$$\begin{aligned} \|S_{n+p} - S_n\| &\leq q^{n+p} + \dots + q^{n+1} = q^{n+1}(1 + q + \dots + q^{p-1}) \leq \\ &\leq q^{n+1} \underbrace{(1 + q + \dots + q^{p-1} + q^p + \dots)}_{\text{сумма геом. прогрессии}} = q^{n+1} \frac{1}{1 - q} \end{aligned}$$

Т.к. $q < 1 \Rightarrow q^{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \Rightarrow \|S_{n+p} - S_n\|$ можем сделать сколь угодно малой $\Rightarrow \{S_n\}$ фундаментальна в операторной норме.

$\mathcal{L}(X, X)$ — банахово $\Rightarrow$ т.к. $\{S_n\}$ фундаментальна, то $\{S_n\}$ сходится $\Rightarrow$ ряд сходится (в силу сходимости частичных сумм):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S \in \mathcal{L}(X, X)$$

Рассмотрим:

$$S(I + A) = \left[\lim_{n \rightarrow \infty} S_n \right] (I + A) = \left[\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(I + A) \right] = \left[\lim_{n \rightarrow \infty} I - A^{n+1} \right] = I,$$

т.к. $\lim_{n \rightarrow \infty} A^{n+1} = 0$, ибо $\|A^n\| \leq \|A\|^n \leq q^n$.

Аналогично: $(I + A)S = I$.

Оператор A линейен $\Rightarrow (I + A)$ линейен $\Rightarrow S$ линейен.

Ограниченность:

$$\|S\| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \|A\|^n \leq \sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1 - q}$$

Таким образом, $(I + A)^{-1} \in \mathcal{L}(X, X)$. Обратимость оператора $(I - A)$ показывается аналогично. □

Теорема 2.3. Пусть $A \in \mathcal{L}(X)$ и пусть $\exists A^{-1}$. Пусть B — линейный оператор такой, что выполняется

$$\|BA\| < \|A^{-1}\|^{-1}$$

Тогда оператор $(A + BA)$ обратим.

Доказательство. Имеет место:

$$A + BA = A(I + A^{-1}BA)$$

Тогда по утверждению 2.3:

$$\|A^{-1}BA\| \leq \|A^{-1}\| \cdot \|BA\| < 1$$

По теореме 2.2 получаем, что оператор $I + A^{-1}BA$ обратим. Следовательно, оператор $A + BA$ обратим, как суперпозиция обратимых операторов. □

Замечание 2.2. Суть теоремы в том, что малое возмущение не выводит за границы класса обратимости. Значит, подмножество обратимых операторов в $\mathcal{L}(X)$ — открыто (т.к. можем взять $B = \lambda A$).

Теорема 2.4 (Банаха об обратном отображении). Пусть X, Y — банаховы пространства, $A : X \xrightarrow[1-1]{\text{На}} Y$ — линейный ограниченный оператор. Тогда существует $A^{-1} \in \mathcal{L}(Y, X)$.

Доказательство. Существование обратного очевидно из определения взаимно-однозначного оператора (надо помнить, что $R(A) = Y$, т.е. A — сюръективен). Линейность также очевидна. Таким образом, осталось показать, что обратный оператор будет ограниченным.

Имеем: $A^{-1} : Y \rightarrow X$ — линейный. По лемме 1.1 получаем:

$$Y = \bigcup_{k=1}^{\infty} Y_k, \text{ где } Y_k = \{y \in Y \mid \|A^{-1}y\|_X \leq k\|y\|_Y\}$$

и при этом хотя бы одно Y_k всюду плотно в Y . Выберем Y_n такое, что Y_n всюду плотно в Y .

Выберем $y \in Y, y \neq \theta$ и обозначим $q = \|y\|$.

Рассмотрим $B_q(0)$ и $S_q(0)$.

Выберем $\{y_m\} \subset B_q(0)$ такую, что $y_m \xrightarrow{m \rightarrow \infty} y$. Такая последовательность существует, т.к. $B_q(0) \cup S_q(0) = \overline{B_q(0)}$ — замкнутое множество $\Rightarrow \exists m_0 \mid \|y - y_{m_0}\| \leq \frac{q}{4}$

Y_n всюду плотно в $Y \Rightarrow \exists y_{m_0}^* \in Y_n$ такой, что

$$\|y_{m_0}^* - y_{m_0}\| \leq \frac{q - \|y_{m_0}\|}{4}$$

Т.е. к любому $y \in Y$ можем с наперёд заданной точностью приблизиться элементами из Y_n .

Имеем:

$$\begin{aligned} \|y - y_{m_0}^*\| &= \|y + y_{m_0} - y_{m_0} - y_{m_0}^*\| \leq \|y - y_{m_0}\| + \\ &+ \|y_{m_0} - y_{m_0}^*\| \leq \frac{q}{4} + \frac{q}{4} - \frac{\|y_{m_0}\|}{4} \leq \frac{q}{2} \end{aligned}$$

Оценим:

$$\begin{aligned} \|y_{m_0}^*\| &= \|y_{m_0}^* + y_{m_0} - y_{m_0}\| \leq \|y_{m_0}^* - y_{m_0}\| + \|y_{m_0}\| \leq \\ &\leq \frac{q - \|y_{m_0}\|}{4} + \|y_{m_0}\| = \frac{q}{4} + 3\frac{\|y_{m_0}\|}{4} \leq q \quad (\text{т.к. } y_{m_0} \in B_q(0)) \end{aligned}$$

Обозначим $z_1 = y_{m_0}^* \in Y_n$. Имеем:

$$\|y - z_1\| \leq \frac{q}{2}; \quad \|z_1\| \leq q$$

Т.е. получаем, что $z_1 \in Y_n \cap \overline{B_q(0)}$.

Повторяем предыдущие рассуждения (в качестве y берём $y - z_1$). Тогда:

$$\|y - z_1 - z_2\| \leq \frac{q}{4}; \quad \|z_2\| \leq \frac{q}{2}$$

и так далее. В итоге получаем последовательность $\{z_k\}$ такую, что $\forall m$:

$$\|y - (z_1 + z_2 + \dots + z_m)\| \leq \frac{q}{2^m} \quad (\star)$$

$$\|z_m\| \leq \frac{q}{2^{m-1}}$$

$$z_m \in Y_n \cap \overline{B_{\frac{q}{2^{m-1}}}}(0)$$

Положим: $x_m = A^{-1}z_m$ (запись корректна, т.к. обратный оператор существует). Из $(\star)$ следует, что: $y = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^k z_i$.

Поскольку $z_m \in Y_n$, то:

$$\|x_m\| \leq n\|z_m\| \leq \frac{nq}{2^{m-1}} \quad (\star\star)$$

Обозначим: $s_k = \sum_{i=1}^k x_i$. Последовательность $\{s_k\}$ является фундаментальной:

$$\|s_k - s_{k+p}\| = \left\| \sum_{i=k+1}^{k+p} x_i \right\| \leq \sum_{i=k+1}^{k+p} \|x_i\| \leq \sum_{i=k+1}^{k+p} \frac{nq}{2^{i-1}}$$

Известно, что ряд $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^{i-1}}$ сходится, следовательно, по критерию Ко-

ши получаем, что величина $\sum_{i=k+1}^{k+p} \frac{1}{2^{i-1}}$ может быть сделана сколь угодно малой. Таким образом, последовательность $\{s_k\}$ действительно является фундаментальной. Следовательно, она сходится, т.к. пространство X является банаховым.

Тогда по критерию Коши получаем, что ряд $\sum_{i=1}^{\infty} x_i$ — сходится. Обозначим:

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} x_i = \lim_{k \rightarrow \infty} s_k$$

Имеем

$$\begin{aligned} Ax &= A \left(\lim_{k \rightarrow \infty} s_k \right) = A \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^k x_i = \left(\begin{array}{l} A \text{ — непрерывен} \Rightarrow \\ \Rightarrow A \lim = \lim A \end{array} \right) = \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} A \left(\sum_{i=1}^k x_i \right) = (A \text{ — линейен}) = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^k Ax_i = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^k z_i = y \end{aligned}$$

Таким образом, построен элемент x , который является прообразом y .

$$\|A^{-1}y\| = \|x\| = \left\| \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^k x_i \right\|$$

Очевидно, что $\|\cdot\|$ — непрерывная функция. Тогда $\|\lim\| = \lim\|\cdot\|$. Отсюда получаем:

$$\begin{aligned}\|A^{-1}y\| &= \lim_{k \rightarrow \infty} \left\| \sum_{i=1}^k x_i \right\| \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^k \|x_i\| \leq \\ &\leq (\text{по } (\star\star)) \leq nq \underbrace{\lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^k \frac{1}{2^{i-1}}}_{\text{предел } =2} = 2nq = 2n\|y\|\end{aligned}$$

В итоге получаем:

$$\|A^{-1}y\| \leq K\|y\| \quad \forall y \in Y \Rightarrow A^{-1} - \text{ограничен}$$

□

3 Функционалы в нормированных пространствах

Опр 3.1. *Функционалом называется отображение $f : X \rightarrow \mathbb{R}(\mathbb{C})$.*

По умолчанию работаем над полем $\mathbb{R}$.

Пример 3.1. $\|\cdot\|$ — функционал (нелинейный).

Опр 3.2. *Цепь — подмножество, любые два элемента которого сравнимы.*

Верхняя граница цепи — элемент, больший или равный любого элемента цепи.

Элемент a называется максимальным, если $\nexists b \mid a \leq b$.

Лемма 3.1 (Цорна). Пусть Z — частично-упорядоченное множество, в котором всякая цепь имеет верхнюю границу. Тогда в Z существует максимальный элемент и $\forall a \in Z : \exists b \geq a \mid b$ — максимальный в Z .

Теорема 3.1 (Хана-Банаха). Пусть X — нормированное пространство. L — линейное многообразие из X ; f — линейный ограниченный функционал, заданный на L :

$$|f(x)| \leq \underbrace{\|f\|_L}_K \cdot \|x\| \quad \forall x \in L$$

Тогда f можно продолжить на всё пространство X , причём с сохранением нормы, т.е.

$$\exists F \mid F(x)|_L = f(x); \quad \|F\| = \|f\|_L$$

(Лекция №4, 27.09.2010)

Доказательство. Зафиксируем $x_0 \in X \setminus L$.

Построим новое, более широкое многообразие:

$$L_1 = \{y \in X \mid \exists x \in L, \exists t \in \mathbb{R}, y = x + tx_0\}$$

Предположим, что y имеет два представления:

$$\left. \begin{array}{l} y = x_1 + t_1 x_0 \\ y = x_2 + t_2 x_0 \end{array} \right\} \Rightarrow x_1 - x_2 = (t_2 - t_1)x_0$$

Если $t_1 = t_2$, то $x_1 = x_2$, и, следовательно, представление y единственно. Если же $t_1 \neq t_2$, то:

$$x_0 = \underbrace{\frac{x_1}{t_2 - t_1}}_{\in L} - \underbrace{\frac{x_2}{t_2 - t_1}}_{\in L} \Rightarrow x_0 \in L,$$

что противоречит выбору x_0 , следовательно, представление y единственно.

Пусть $x', x'' \in L$. Рассмотрим:

$$\begin{aligned} f(x') - f(x'') &= \left(\begin{array}{c} \text{поскольку } f - \\ \text{линейный функционал} \end{array} \right) = f(x' - x'') \leq \\ &\leq |f(x' - x'')| \leq (\text{т.к. } |f(x)| \leq \|f\| \cdot \|x\|) \leq \\ &\leq \|f\| \cdot \|x' - x''\| \leq \|f\| \cdot (\|x' + x_0\| + \|x'' + x_0\|) \end{aligned}$$

Получаем:

$$\begin{aligned} f(x') - \|f\| \cdot \|x' + x_0\| &\leq f(x'') + \|f\| \cdot \|x'' + x_0\|; \Rightarrow \\ \Rightarrow (\text{т.к. } x', x'' - \text{ произвольные элементы из } L) &\Rightarrow \\ \sup_{x \in L} (f(x) - \|f\| \cdot \|x + x_0\|) &\leq \inf_{x \in L} (f(x) + \|f\| \cdot \|x + x_0\|) \end{aligned}$$

Последнее неравенство — это неравенство для двух действительных чисел. Тогда $\exists c \in \mathbb{R}$ такое, что

$$\sup_{x \in L} (f(x) - \|f\| \cdot \|x + x_0\|) \leq c \leq \inf_{x \in L} (f(x) + \|f\| \cdot \|x + x_0\|) \quad (2)$$

Рассмотрим произвольный $y \in L_1$. По доказанному выше: $y = x + tx_0$, где x, t определены однозначно. Определим новый функционал $\varphi(y)$ для элемента $y = x + tx_0$:

$$\varphi(y) = f(x) - tc$$

Это и есть продолжение — очевидно, что f и φ совпадают на L . Линейность φ очевидна. Необходимо доказать ограниченность φ и выполнение $\|\varphi\| = \|f\|$.

Рассмотрим такие y , для которых $t > 0$.

$$\varphi(y) = t \left(f\left(\frac{x}{t}\right) - c \right)$$

Согласно левой части неравенства (2) получаем:

$$f(x) - \|f\| \cdot \|x + x_0\| \leq c; \Rightarrow f\left(\frac{x}{t}\right) - c \leq \|f\| \cdot \left\| \frac{x}{t} + x_0 \right\|$$

Следовательно

$$\begin{aligned} \varphi(y) &\leq t \|f\| \cdot \left\| \frac{x}{t} + x_0 \right\| = \|f\| \cdot \|y\| \\ \varphi(x + tx_0) &\leq \|f\| \cdot \|y\| \end{aligned}$$

Рассмотрим теперь такие y , для которых $t < 0$. Согласно правой части неравенства (2) получаем:

$$\begin{aligned} f\left(\frac{x}{t}\right) - c &\geq -\|f\| \cdot \left\|\frac{x}{t} + x_0\right\| = -\|f\| \cdot \left\|\frac{1}{t}(x + tx_0)\right\| = \\ &= -\frac{1}{|t|}\|f\| \cdot \|x + tx_0\| = \frac{1}{t}\|f\| \cdot \|x + tx_0\| = \frac{1}{t}\|f\| \cdot \|y\| \end{aligned}$$

Следовательно

$$\varphi(y) = \varphi(x + tx_0) = f(x) - tc = t\left(f\left(\frac{x}{t}\right) - c\right) \leq_{(t<0)} \|f\| \cdot \|y\|$$

Заменим y на $-y$. Аналогичными рассуждениями для $t > 0$ и $t < 0$ получаем:

$$\varphi(-y) = -\varphi(y) = -t\left(f\left(\frac{x}{t}\right) - c\right) \leq \|f\| \cdot \|y\|$$

Отсюда

$$|\varphi(y)| \leq \|f\| \cdot \|y\| \Rightarrow \|\varphi\|_{L_1} \leq \|f\|_L$$

Т.е. ограниченность функционала доказана.

Многообразие L_1 шире многообразия L , следовательно, очевидно, что $\|\varphi\|_{L_1} \geq \|f\|_L$. В итоге:

$$\|\varphi\|_{L_1} = \|f\|_L$$

Таких продолжений может оказаться сколь угодно много. Пусть Φ — это совокупность всех продолжений, сохраняющих норму. На нём можно ввести частичный порядок по правилу:

$$\varphi' \prec \varphi'', \text{ если } L' \subset L'' \text{ и } \varphi''|_{L'} = \varphi'$$

Пусть $\{\varphi_\alpha\}_{\alpha \in A}$ — произвольное линейно-упорядоченное семейство в Φ , (A — множество индексов). Любые два φ_α связаны отношением предшествования. Определим:

$$L^* = \bigcup_{\alpha \in A} L_\alpha, \text{ где } L_\alpha \text{ — многообразие, область определения } \varphi_\alpha$$

Определим $\varphi^*(y) = \varphi_{\alpha_0}(y)$ (т.к. $y \in L^* \Rightarrow \exists \alpha_0 \mid y \in L_{\alpha_0}$). Определение корректно, т.к. $\{\varphi_\alpha\}$ упорядочено.

φ^* является продолжением каждого φ_α с многообразия L_α на L^* . То есть φ^* является верхней гранью, при этом

$$\|\varphi^*\|_{L^*} = \|f\|$$

По лемме Цорна (лемма 3.1) в Φ существует максимальный элемент F , т.е. элемент — продолжение f на многообразии L_0 . Дальнейшего продолжения не существует (иначе возникает противоречие с максимальной F), следовательно, $L_0 = X$. По лемме $F \in \Phi$, т.е. F сохраняет норму. □

Замечание 3.1. Если X сепарабельно, то доказательство теоремы можно провести без леммы Цорна.

Следствие 3.1. Пусть X — нормированное пространство, $x_0 \neq \theta$. Тогда существует $F(x)$ такой, что

$$1) \|F\| = 1; \quad 2) F(x_0) = \|x_0\|$$

Доказательство. Рассмотрим прямую, проходящую через точку x_0

$$L = \{x \mid x = tx_0\}$$

Определим $f(x) = t\|x_0\|$. Очевидно, что f является линейным и ограниченным. Более того, из определения f следует, что $f(x_0) = \|x_0\|$. Имеем:

$$|f(x)| = |t| \cdot \|x_0\| = \|x\| \Rightarrow \|f\| = 1$$

По теореме 3.1 $\exists F \mid \|F\| = \|f\| = 1, F(x_0) = f(x_0) = \|x_0\| = |f(x_0)| = |F(x_0)|$, и при этом F определён на всём X .

□

Следствие 3.2. Пусть X — нормированное пространство; $L \subset X$ — линейное многообразие. Пусть $x_0 \in X \setminus L$ и $\rho(x_0, L) = \inf_{x \in L} \rho(x_0, x) = d > 0$.

Тогда $\exists F \mid F$ строго разделяет L и x_0 :

1. $F(x) = 0 \forall x \in L$
2. $\|F\| = \frac{1}{d}$
3. $F(x_0) = 1$

Доказательство. Рассмотрим

$$L_1 = \{y \in X \mid \exists x \in L \exists t \in \mathbb{R}, y = x + tx_0\},$$

и определим f по правилу: $f(y) = t$. Видно, что $\forall y \in L : f(y) = 0$. Вычислим:

$$|f(y)| = |t| = \frac{|t| \cdot \|y\|}{\|y\|} = \frac{|t| \cdot \|y\|}{\|x + tx_0\|} = \frac{\|y\|}{\frac{1}{|t|}\|x + tx_0\|} = \frac{\|y\|}{\|x_0 - (-\frac{x}{t})\|} \leq \frac{\|y\|}{d},$$

т.к. $\|x_0 - (-\frac{x}{t})\| \geq d$, как расстояние от точки из L до x_0

Таким образом, получаем:

$$\|f\| \leq \frac{1}{d} \quad (\star)$$

Из свойств точной нижней грани ($\rho(x_0, L) = d$) следует, что $\exists \{x_n\} \subset L \mid \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x_0\| = d$. Рассмотрим:

$$f(x_n - x_0) \leq |f(x_n - x_0)| \leq \|f\| \cdot \|x_n - x_0\|$$

С другой стороны:

$$|f(x_n - x_0)| = |f(x_n) - f(x_0)| = |0 - 1| = 1$$

Таким образом

$$1 \leq \|f\|_{L_1} \cdot \|x_n - x_0\| \Rightarrow \|f\| \geq \frac{1}{\|x_n - x_0\|}$$

Переходя к пределу, получим:

$$\|f\| \geq \frac{1}{d} \quad (**)$$

Из (*) и (**) следует, что

$$\|f\| = \frac{1}{d}$$

По теореме 3.1 $\exists F$ такой, что

$$\|F\| = \frac{1}{d}; \quad F(x) = f(x) \forall x \in L; \quad F(x_0) = f(x_0) = 1.$$

□

3.1 Сопряжённые операторы

Пусть X — нормированное пространство.

Опр 3.3. $X^* = \mathcal{L}(X, \mathbb{R})$ называется сопряжённым пространством.

Замечание 3.2. Пространство $\mathbb{R}$ является банаховым, следовательно, X^* также является банаховым (по теореме 1.7).

Опр 3.4. Пусть $A \in \mathcal{L}(X, Y)$. Пусть $\varphi(y) \in Y^*$. Определим функционал f по следующему правилу: $f(x) = \varphi(Ax)$. Т.е.

$$\varphi \in Y^* \longrightarrow f \in X^*$$

Это отображение: $A^* : Y^* \rightarrow X^*$ называется сопряжённым оператором. Очевидно, что он линеен.

Теорема 3.2. Пусть $A \in \mathcal{L}(X, Y)$. Тогда $A^* \in \mathcal{L}(Y^*, X^*)$, причём

$$\|A\|_{\mathcal{L}(X, Y)} = \|A^*\|_{\mathcal{L}(Y^*, X^*)}$$

Доказательство. Очевидно, что A^* — линейный оператор. Необходимо доказать, что $\|A^*\| = \|A\|$.

Пусть $x \in X$. Имеем:

$$\|(A^*\varphi)(x)\| = \|f(x)\| = |f(x)| = |\varphi(Ax)| \leq \|\varphi\| \cdot \|A\| \cdot \|x\|$$

Следовательно

$$\|A^*\varphi\| \leq \|A\| \cdot \|\varphi\| \Rightarrow \|A^*\| \leq \|A\|$$

Теперь в обратную сторону. Пусть $x_0 \in X$ — фиксированный. Согласно следствию 3.1 $\exists \varphi_0 \mid \|\varphi_0\| = 1, \varphi_0 \in X^*$ и $\varphi_0(Ax_0) = \|Ax_0\|$.

Имеем:

$$\|Ax_0\| = \varphi_0(Ax_0) = f(x_0) \leq \|f\| \cdot \|x_0\| = \|A^*\varphi_0\| \cdot \|x_0\|$$

здесь f соответствует функционалу φ_0 . Тогда:

$$\|A\| \leq \|A^*\varphi_0\| \leq \|A^*\| \cdot \underbrace{\|\varphi_0\|}_{=1} = \|A^*\|$$

Таким образом, получаем требуемое: $\|A^*\| = \|A\| \Rightarrow$ ограниченность.

□

3.2 Функционалы и слабая сходимость

Опр 3.5. Пусть X — нормированное пространство. Последовательность $\{x_n\} \in X$ называется слабо сходящейся к элементу $x_0 \in X$, если для любого $f \in X^*$ выполняется:

$$f(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(x_0)$$

Упр 3.1. Доказать следующие свойства: (см. стр. 90)

1. Слабый предел определён единственным образом.
2. Если последовательность $\{x_n\}$ слабо сходится к x_0 , то любая её подпоследовательность слабо сходится к x_0 .
3. Любая сильно (по норме) сходящаяся последовательность является слабо сходящейся. Обратно неверно:

$$\begin{array}{rcl} & & (1000 \dots 0 \dots) \\ \text{В пространстве } l_2: & & (0100 \dots 0 \dots) \\ & & (0010 \dots 0 \dots) \\ & & \dots \end{array}$$

Данная последовательность сходится слабо, но не является сильно сходящейся.

4. В конечномерном пространстве: сильная $\equiv$ слабая.

Теорема 3.3. Если $x_n \xrightarrow{\text{слаб}} x_0$, то существует последовательность линейных комбинаций $\{\sum C_{k_n} x_{k_n}\}$, сходящаяся сильно к x_0 .

Доказательство. Пусть L — совокупность всех линейных комбинаций над $\{x_n\}$. Необходимо доказать, что $x_0 \in \bar{L}$.

Будем доказывать от противного. Пусть $x_0 \notin \bar{L}$ и $\rho(x_0, \bar{L}) > 0$. Тогда по следствию 3.2 $\exists f \mid f(x_0) = 1$ и $f(x) = 0 \forall x \in \bar{L}$.

Получаем, что $\forall k: f(x_k) = 0$, что противоречит слабой сходимости. $\square$

(Лекция №5, 04.10.2010)

Теорема 3.4. Пусть $A \in \mathcal{L}(X, Y)$; X, Y — нормированные и пусть $\{x_n\} \xrightarrow{\text{слаб}} x_0 \in X$. Тогда $Ax_n \xrightarrow{\text{слаб}} Ax_0$.

Доказательство. Пусть $\varphi \in Y^*$. Определим $f(x) = \varphi(Ax)$.

Нетрудно убедиться, что $f \in X^*$. Тогда, т.к. $\{x_n\} \xrightarrow{\text{слаб}} x_0$, получаем:

$$f(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(x_0) \Rightarrow \varphi(Ax_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \varphi(Ax_0)$$

Т.к. φ — произвольный, то получаем, что $Ax_n \xrightarrow{\text{слаб}} Ax_0$. $\square$

Замечание 3.3. $(X^*)^* \neq X$

Утв 3.1. Пусть $x \in X$ — произвольный фиксированный элемент. Определим

$$F_x(f) = f(x), \text{ где } f \in X^*$$

Тогда $\|F_x\| = \|x\|$, т.е. F_x ограничен (или $F_x \in (X^*)^*$).

Доказательство. Имеем:

$$|F_x(f)| = |f(x)| \leq \|f\| \cdot \|x\| \Rightarrow \|F_x\| \leq \|x\|$$

С другой стороны, по следствию 3.1 $\exists f_0 \in X^* \mid \|f_0\| = 1$ и $f_0(x) = |f_0(x)| = \|x\|$. Т.е. получаем, что $|F_x(f_0)| = \|x\|$. Отсюда:

$$\|F_x\| = \sup_{\substack{f \in X^* \\ \|f\| \neq 0}} \frac{|F_x(f)|}{\|f\|} \geq (f = f_0) \geq \frac{|F_x(f_0)|}{\|f_0\|} = \|x\|$$

В итоге получаем требуемое: $\|F_x\| = \|x\|$. □

Таким образом, каждому $x \in X$ ставится в соответствие $F_x \in (X^*)^*$, причём соответствие между X и $(X^*)^*$ взаимно однозначно и изометрично ($\|F_x\| = \|x\|$). Получаем, что $X \subset (X^*)^*$.

Возникает вопрос: а есть ли в $(X^*)^*$ другие функционалы? Т.е. такие F , что не существует $x \in X \mid F = F_x$.

Опр 3.6. Нормированное пространство X , в $(X^*)^*$ которого нет функционалов, отличных от F_x , называется рефлексивным. Т.е. $X = X^{**}$ с точностью до изоморфизма.

Пример 3.2. Рефлексивные пространства: любое гильбертово, l_p , L_p .

- $l_p^* = l_q$, где $p > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.
- $(L_p(Q))^* = L_q(Q)$, где $p > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.
- $C(\overline{Q})$ не является рефлексивным. Пусть $\overline{Q} = [a, b]$. Функционал $f \in C^*[a, b]$ определяется следующим образом:

$$f(x(t)) = \int_a^b x(t) dg(t) \text{ — интеграл Стильтьеса}$$

здесь g — функция, с ограниченной вариацией (в частности, $g(x)$ может иметь конечное число точек разрыва первого рода и, тем самым, не быть непрерывной).

Теорема 3.5. Пусть $\{x_n\} \subset X$ — слабо сходящаяся последовательность. Тогда последовательность $\{\|x_n\|\}$ является ограниченной.

Доказательство. Рассмотрим последовательность $\{F_{x_n}(f)\}$.

С одной стороны, это последовательность функционалов. С другой, $F_{x_n}(f) = f(x_n)$ — числовая последовательность.

Имеем:

$\{x_n\}$ слабо сходится $\Rightarrow \forall f \in X^*$ числовая последовательность $\{f(x_n)\}$ сходится $\Rightarrow \{F_{x_n}(f)\}$ сходится, следовательно, по теореме 1.9 получаем, что последовательность $\{\|F_{x_n}\|\}$ ограничена.

По утверждению 3.1: $\|F_{x_n}\| = \|x_n\|$, отсюда получаем требуемое. □

Теорема 3.6. Пусть $\{x_n\} \subset X$ слабо сходится. Тогда выполняется:

$$\|x_0\| \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|x_n\|$$

Доказательство. От противного. Пусть выполняется $\|x_0\| > \liminf_{n \rightarrow \infty} \|x_n\|$. Это неравенство двух вещественных чисел, следовательно, существует такая константа $C > 0$, для которой выполняется:

$$\|x_0\| > C > \liminf_{n \rightarrow \infty} \|x_n\| \Leftrightarrow A$$

Из определения нижнего предела следует, что $\exists \{x_{n_k}\} \mid x_{n_k} \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} A$. При этом, можно считать, что

$$\|x_0\| > C > \|x_{n_k}\| \quad (\text{лишние элементы } x_{n_k} \text{ выкинем})$$

По следствию 3.1 $\exists f_0 \mid f_0(x_0) = \|x_0\|$ и $\|f_0\| = 1$.

Имеем:

$$|f_0(x_{n_k})| \leq \|f_0\| \cdot \|x_{n_k}\| = \|x_{n_k}\| < C < \|x_0\| = f_0(x_0)$$

Т.к. $\{x_n\}$ слабо сходится, то, ввиду существования функционала f_0 , приходим к противоречию с определением слабой сходимости. □

Опр 3.7. Пусть $x \in X, f \in X^*$. f и x ортогональны, если $f(x) = 0$.

Опр 3.8. Семейства $\{x_1 \dots x_m\} \subset X$ и $\{f_1 \dots f_n\} \subset X^*$ биортогональны, если $f_i(x_j) = \delta_i^j = \begin{cases} 1, & i = j; \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$

Теорема 3.7. Пусть есть конечная или бесконечная система элементов $\{x_n\} \subset X$, образующая базис. И пусть $\{f_m\} \subset X^* \mid \{x_n\}$ и $\{f_m\}$ — биортогональны. Тогда любые $x \in X$ и $f \in X^*$ представимы в виде рядов Фурье:

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} f_i(x) x_i \quad f = \sum_{i=1}^{\infty} f(x_i) f_i$$

Для конечной аналогично.

Доказательство. Рассмотрим бесконечный случай.

Любой элемент x можно разложить по базису:

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k x_k$$

Рассмотрим

$$\begin{aligned} f_i(x) &= f_i\left(\lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^m \alpha_k x_k\right) = (f \in X^*) = \lim_{m \rightarrow \infty} f_i\left(\sum_{k=1}^m \alpha_k x_k\right) = \\ &= (f - \text{линеен}) = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^m \alpha_k f_i(x_k) = \left(f_i(x_k) = \begin{cases} 0, & i \neq k \\ 1, & i = k \end{cases}\right) = \alpha_i \end{aligned}$$

Тогда

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} f_i(x)x_i$$

Рассмотрим второе равенство. Функционалы равны, если совпадает действие на любом элементе:

$$\begin{aligned} f(x) &= f\left(\lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^m f_i(x)x_i\right) = \lim_{m \rightarrow \infty} f\left(\sum_{i=1}^m f_i(x)x_i\right) = \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^m f_i(x)f(x_i) = \sum_{i=1}^{\infty} f_i(x) \underbrace{f(x_i)}_{\text{число}} \end{aligned}$$

Получили, что действие f — есть комбинация действий f_i :

$$f = \sum_{i=1}^{\infty} f(x_i)f_i$$

□

Замечание 3.4. Ясно, что f_i — линейно независимая система. Таким образом, из теоремы следует, что $\{f_m\}$ — базис в сопряжённом пространстве.

4 Компактные множества в нормированных пространствах

Опр 4.1. Пусть X — нормированное пространство. Множество $M \subset X$ относительно компактно, если из любой его последовательности элементов можно извлечь фундаментальную подпоследовательность.

Множество M называется компактным, если из любой его последовательности элементов можно извлечь подпоследовательность, сходящуюся к элементу из M .

Утв 4.1. Любое компактное множество M замкнуто.

Доказательство. (В курсе лекций не приводилось)

Выберем последовательность $\{x_n\} \subset M \mid x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x_0$.

Последовательность $\{x_n\}$ является своей подпоследовательностью, следовательно, т.к. M компактно, $x_0 \in M$.

Таким образом, получаем, что $M = \overline{M}$.

□

Утв 4.2. Любое компактное множество M ограничено.

Доказательство. (В курсе лекций не приводилось)

Докажем от противного, пусть множество M неограничено, т.е.

$$\exists \{x_n\} \subset M \mid \|x_n\| > n$$

Очевидно, что тогда из $\{x_n\}$ нельзя выбрать сходящуюся подпоследовательность. Пришли к противоречию с компактностью множества M .

□

Замечание 4.1. Из компактности следует замкнутость и ограниченность. Обратное неверно: Пусть H — бесконечномерное гильбертово пространство, $\{e_n\}$ — его базис. Множество $\{e_n\}$ ограничено и замкнуто, но не компактно:

$$\forall n, m, n \neq m : \|e_n - e_m\| = \sqrt{2}$$

Теорема 4.1 (Вейерштрасса). Пусть f — вещественный непрерывный функционал, определённый на компактном множестве M , тогда f ограничен и достигает наибольшего и наименьшего значений на M .

Упр 4.1. Доказать теорему 4.1. (см. стр. 91)

Теорема 4.2. Относительно компактное множество M компактно $\Leftrightarrow M$ замкнуто.

Упр 4.2. Доказать теорему 4.2. (см. стр. 92)

Опр 4.2. Пусть $\varepsilon > 0$. Множество M_ε называется ε -сетью для M , если выполняется:

$$\forall x \in M \exists x_\varepsilon \in M_\varepsilon \mid \|x - x_\varepsilon\| < \varepsilon$$

Теорема 4.3 (Хаусдорфа). Пусть X — нормированное пространство. Множество $M \subset X$ относительно компактно $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0$ в пространстве X существует конечная ε -сеть для M .

Доказательство. ($\Rightarrow$) Пусть $M \subset X$ относительно компактно. Выберем $\varepsilon > 0$. Возьмём $x_1 \in M$.

Если $\forall x \in M : \|x - x_1\| < \varepsilon$, то получили искомую ε -сеть из одного элемента.

Если же это не так, то

$$\exists x_2 \in M \mid \|x_1 - x_2\| \geq \varepsilon$$

Если $\forall x \in M : \|x - x_1\| < \varepsilon$ или $\|x - x_2\| < \varepsilon$, то получили искомую ε -сеть из двух элементов.

Если же это не так, то

$$\exists x_3 \in M \mid \|x_1 - x_3\| \geq \varepsilon, \|x_2 - x_3\| \geq \varepsilon$$

...

Процесс либо оборвётся, и мы получим конечную ε -сеть, либо не оборвётся, и мы получим последовательность $\{x_n\}$ такую, что $\forall n \neq m$:

$$\|x_n - x_m\| \geq \varepsilon$$

Из этой последовательности невозможно выбрать сходящуюся подпоследовательность, что противоречит относительной компактности множества M .

($\Leftarrow$) Пусть $\forall \varepsilon > 0$ в X существует конечная ε -сеть для M .

Возьмём последовательность $\{\varepsilon_n\} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{МОНОТ}} 0$. Для каждого ε_n существует конечная ε_n -сеть — получаем последовательность $\{M_{\varepsilon_n}\}$.

Рассмотрим $\{x_n\} \subset M$. Докажем, что существует хотя бы одна сходящаяся подпоследовательность.

Если для ε -сети возьмём шары с центрами в точках из M_ε и радиусами ε , то имеем:

$$M \subset \bigcup_{x \in M_\varepsilon} B_\varepsilon(x)$$

В частности, для $\varepsilon = \varepsilon_1$:

$$M \subset \bigcup_{i_1=1}^{m_1} B_{\varepsilon_1}(x_{i_1}), \text{ где } m_1 \text{ — мощность } \varepsilon_1\text{-сети.}$$

Хотя бы в одном из этих шаров будет лежать бесконечно много элементов последовательности $\{x_n\}$. Обозначим этот шар через B_1 , а через N_1 — подпоследовательность из $\{x_n\}$, принадлежащую B_1 . Зафиксируем элемент из N_1 , например, имеющий наименьший номер. Обозначим его через x_{n_1} .

Перейдём к ε_2 -сети:

$$M \subset \bigcup_{i_2=1}^{m_2} B_{\varepsilon_2}(x_{i_2}), \text{ где } m_2 \text{ — мощность } \varepsilon_2\text{-сети.}$$

Существует такой i_2 , что шар $B_{\varepsilon_2}(x_{i_2})$ содержит бесконечное число элементов последовательности N_1 . Обозначим этот шар через B_2 , а через N_2 — подпоследовательность из N_1 , принадлежащую B_2 . Зафиксируем элемент из N_2 , имеющий наименьший номер, больший n_1 . Обозначим его через x_{n_2} .

Продолжая по аналогии, получаем последовательность $\{x_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$. Покажем, что она фундаментальная.

Имеем: B_k — семейство вложенных шаров; $x_{n_l} \in B_k$ при $l \geq k$.

Пусть x_k^o — центр шара B_k , тогда:

$$\|x_{n_k} - x_{n_{k+p}}\| = \|x_{n_k} - x_k^o + x_k^o - x_{n_{k+p}}\| \leq \|x_{n_k} - x_k^o\| + \|x_{n_{k+p}} - x_k^o\| < 2\varepsilon_k$$

Последнее неравенство верно в силу вложенности шаров. По построению $\varepsilon_k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0$, следовательно, $\{x_{n_k}\}$ фундаментальна и, тем самым, имеет предел (который необязательно принадлежит X). В итоге получаем, что M относительно компактно. □

Следствие 4.1. Пусть X — полное нормированное пространство. Если $\forall \varepsilon > 0$ для $M \subset X$ существует относительно компактная ε -сеть, то M относительно компактное множество.

Упр 4.3. Доказать следствие 4.1. (см. стр. 92)

Следствие 4.2. Всякое относительно компактное подмножество M нормированного пространства X сепарабельно.

Упр 4.4. Доказать следствие 4.2. (см. стр. 93)

Утв 4.3. В нормированном пространстве последовательность непустых вложенных друг в друга компактных множеств имеет непустое пересечение.

Упр 4.5. Доказать утверждение 4.3.

Опр 4.3. Пусть задано семейство множеств $\{G_\alpha\}_{\alpha \in A}$, каждое из которых является открытым. $\{G_\alpha\}$ называется открытым покрытием множества M , если

$$M \subset \bigcup_{\alpha \in A} G_\alpha, \text{ где } A \text{ — множество индексов}$$

Теорема 4.4. Пусть X — нормированное пространство, $M \subset X$ — замкнутое подмножество X . Тогда M компактно $\Leftrightarrow$ из всякого открытого покрытия множества M можно извлечь конечное подпокрытие.

Доказательство. ($\Rightarrow$) Пусть M компактно. Будем доказывать от противного.

Пусть имеется $\{G_\alpha\}$ — открытое покрытие, и из него нельзя извлечь конечное подпокрытие.

Возьмём последовательность $\{\varepsilon_n\} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{МОНОТ}} 0$. По теореме Хаусдорфа (теорема 4.3) существует ε_1 — сеть, образованная конечным набором точек $x_1, \dots, x_{n_1}$. По определению ε — сети имеем:

$$M \subset \bigcup_{i=1}^{n_1} \overline{B}_{\varepsilon_1}(x_i)$$

Обозначим $M_i = M \cap \overline{B}_{\varepsilon_1}(x_i)$. Тогда $M = \bigcup M_i$. По предположению не существует конечного подпокрытия, следовательно, не будет иметь конечного подпокрытия хотя бы одно M_i . Обозначим это подмножество через K_1 .

M — компакт $\Rightarrow M$ — замкнуто $\Rightarrow \forall i : M \cap \overline{B}_{\varepsilon_1}(x_i)$ — замкнуто $\Rightarrow K_1$ — замкнуто. M — компакт $\Rightarrow M$ — относительно компактно $\Rightarrow M_i$ — относительно компактно $\Rightarrow$ по теореме 4.2 M_i — компакт $\Rightarrow K_1$ — компакт.

K_1 является компактным множеством, следовательно, по теореме 4.3 для множества K_1 существует ε_2 — сеть, образованная конечным набором точек $x_1, \dots, x_{n_2}$. Далее аналогично:

$$K_1 = \bigcup_{i=1}^{n_2} \tilde{K}_i, \text{ причём } \exists j \mid \tilde{K}_j \text{ не имеет конечного подпокрытия}$$

Обозначим: $K_2 = \tilde{K}_j$

В итоге получаем $\{K_n\}$ — семейство вложенных друг в друга компактов. По утверждению 4.3 существует непустое пересечение. Получаем:

$$\left. \begin{array}{l} x^* \in \bigcap_{i=1}^{\infty} K_i \\ M \subset \bigcup_{\alpha \in A} G_\alpha \end{array} \right\} \Rightarrow \exists \alpha_0 \in A \mid x^* \in G_{\alpha_0}$$

Имеем:

$$0 \leq \text{diam} K_i \leq 2\varepsilon_i \xrightarrow{i \rightarrow \infty} 0 \Rightarrow \lim_{i \rightarrow \infty} \text{diam} K_i = 0$$

$$\exists R > 0 \mid B_R(x^*) \subset G_{\alpha_0}$$

Следовательно, найдётся такой $n_0 \in \mathbb{N}$, что $K_{n_0} \subset B_R(x^*)$. Таким образом, получили покрытие множества K_{n_0} множеством $B_R(x^*)$ — конечное подпокрытие из $\{G_{\alpha_0}\}$. Пришли к противоречию с выбором K_i .

($\Leftarrow$) Пусть M таково, что из любого его открытого покрытия можно выбрать конечное подпокрытие.

Будем доказывать от противного. Пусть M не является компактом. Тогда $\exists \{x_n\} \subset M$, у которой не существует сходящихся в M подпоследовательностей:

$$\nexists \{x_{n_k}\} \subset \{x_n\} \mid \{x_{n_k}\} \text{ — сходится}$$

Определим семейство шаров произвольного радиуса $B_\varepsilon(x)$, где $x \in M$, $\varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$. Это континуальное семейство. Очевидно, что оно будет являться открытым покрытием множества M :

$$M \subset \bigcup_{\substack{x \in M \\ \varepsilon > 0}} B_\varepsilon(x)$$

Уменьшая ε , добиваемся того, что каждый шар $B_\varepsilon(x)$ содержит не более одного элемента последовательности $\{x_n\}$. Получим вновь открытое покрытие M . Следовательно, по условию теоремы, существует конечное подпокрытие в этом покрытии. Но отсюда следует, что последовательность $\{x_n\}$ имеет конечное число элементов, чего быть не может. Пришли к противоречию.

□

Опр 4.4. Пусть X — нормированное пространство, $M \subset X$. Множество M называется локально относительно компактным, если пересечение M с любым замкнутым шаром из X будет относительно компактным.

Опр 4.5. Пусть X — нормированное пространство, $M \subset X$. Множество M называется локально компактным, если пересечение M с любым замкнутым шаром из X будет компактным.

Лемма 4.1 (Рисса о почти перпендикуляре). Пусть X — нормированное пространство. L — строгое подпространство X ($L \neq X$). Тогда:

$$\forall \varepsilon \in (0, 1) : \exists z_\varepsilon \notin L \mid \|z_\varepsilon\| = 1 \text{ и } \rho(z_\varepsilon, L) > 1 - \varepsilon$$

Под метрикой понимается следующее: $\rho(x, y) = \|x - y\|$

Доказательство. Возьмём произвольный $x \in X \setminus L$. Тогда получаем: $d = \rho(x, L) = \inf_{y \in L} \rho(x, y) > 0$ (т.к. L — подпространство, то L замкнуто).

По определению точной нижней грани:

$$\exists u_\varepsilon \in L \mid d \leq \|u_\varepsilon - x\| < \frac{d}{1 - \varepsilon} \quad (*)$$

Определим

$$z_\varepsilon = \frac{u_\varepsilon - x}{\|u_\varepsilon - x\|} \notin L, \text{ т.к. } x \notin L \text{ (иначе } u_\varepsilon - x \in L \Rightarrow x \in L)$$

Очевидно, что $\|z_\varepsilon\| = 1$. Выберем произвольный $u \in L$. Тогда:

$$\begin{aligned} \|z_\varepsilon - u\| &= \left\| \frac{u_\varepsilon - x}{\|u_\varepsilon - x\|} - u \right\| = \\ &= \frac{1}{\|u_\varepsilon - x\|} \cdot \left\| \underbrace{u_\varepsilon - u \cdot \|u_\varepsilon - x\|}_{\in L} - x \right\| \geq \frac{1}{\|u_\varepsilon - x\|} \cdot d >^{(*)} 1 - \varepsilon \Rightarrow \\ \inf_{u \in L} \|z_\varepsilon - u\| &= \rho(z_\varepsilon, L) > 1 - \varepsilon \end{aligned}$$

□

Теорема 4.5 (Рисса). Пусть X — нормированное пространство. $L \subset X$ — линейное многообразие. Тогда L локально относительно компактно $\Leftrightarrow L$ конечномерно.

Доказательство. ($\Rightarrow$) Пусть линейное многообразие L локально относительно компактно в X . Будем доказывать от противного, т.е. предположим, что L бесконечномерно.

Возьмём $x_0 \in X, R > 0$. Имеем: $\overline{B}_R(x_0) \cap L$ — относительно компактно в X , т.к. L является локально относительно компактным.

Т.к. L является линейным многообразием, то $\exists x_1 \in L \mid \|x_1\| = 1$. Определим:

$$\begin{aligned} z_1 &= x_0 + Rx_1 \\ M_1 &= \{x \mid x = \lambda x_1\} — подпространство L \end{aligned}$$

Применим лемму 4.1 для L и M_1 :

$$\exists x_2 \in L \setminus M_1 \mid \|x_2\| = 1 \text{ и } \rho(x_2, M_1) > \frac{1}{2}$$

Определим: $z_2 = x_0 + Rx_2$. Очевидно, что $z_2 \in \overline{B}_R(x_0)$. Имеем:

$$\|z_2 - z_1\| = R\|x_2 - \underbrace{x_1}_{\in M_1}\| > R \cdot \frac{1}{2} = \frac{R}{2}$$

Продолжим построение. Пусть уже построены

$$z_k = x_0 + Rx_k \quad \forall k \in \{1, 2, \dots, n\}$$

Построим x_{n+1} . Пусть M_n — подпространство, порождённое элементами $x_1, \dots, x_n$, т.е. $M_n = \text{span}\{x_1, \dots, x_n\}$. Поскольку L бесконечномерно, то $M_n \neq L$.

Так как M_n конечномерно $\Rightarrow$ оно замкнуто $\Rightarrow$ можно применить лемму 4.1, получаем:

$$\exists x_{n+1} \in L \setminus M_n \mid \|x_{n+1}\| = 1 \text{ и } \rho(x_{n+1}, M_n) > \frac{1}{2}$$

Определим:

$$z_{n+1} = x_0 + Rx_{n+1} \in \overline{B}_R(x_0)$$

Получили бесконечные последовательности $\{x_n\}$ и $\{z_n\}$. По построению:

$$\|z_{n+1} - z_k\| > \frac{R}{2} \quad \forall k \in \{1, 2, \dots, n\} \quad (*)$$

Имеем: $z_n \in L \ \forall n \Rightarrow \{z_n\} \subset \overline{B}_R(x_0) \cap L$, следовательно, т.к. $\overline{B}_R(x_0) \cap L$ относительно компактно, в $\{z_n\}$ можно выделить сходящуюся подпоследовательность. Но это противоречит $(\star)$. Пришли к противоречию, значит L конечномерно

$(\Leftarrow)$ Пусть L конечномерно. Возьмём $B \subset X$ — произвольный замкнутый шар. Тогда $L \cap B$ — ограничено. По теореме Больцано-Вейерштрасса в конечномерном пространстве любая ограниченная последовательность имеет сходящуюся подпоследовательность. Т.е. $L \cap B$ относительно компактно. В силу произвольности выбора B получаем, что L локально относительно компактно.

□

Опр 4.6. Пусть X — нормированное пространство. Множество $M \subset X$ называется слабо относительно компактным, если из любой последовательности его элементов можно извлечь слабо сходящуюся подпоследовательность.

Опр 4.7. Пусть X — нормированное пространство. Множество $M \subset X$ называется слабо компактным, если из любой последовательности его элементов можно извлечь слабо сходящуюся подпоследовательность, предел которой принадлежит M .

Теорема 4.6. Всякое слабо относительно компактное подмножество нормированного пространства X ограничено.

Доказательство. Будем доказывать от противного.

Пусть M слабо относительно компактно и M не ограничено. Тогда

$$\forall n \in \mathbb{N} : \exists x_n \in M \mid \|x_n\| > n$$

Получили последовательность элементов множества M . По определению 4.6 из $\{x_n\}$ можно извлечь слабо сходящуюся подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$. Тогда по теореме 3.5 получаем, что $\{\|x_{n_k}\|\}$ ограничена. Но $\|x_{n_k}\| > n_k \ \forall k$. Пришли к противоречию.

□

Теорема 4.7 (о выборе). Пусть X рефлексивное банахово пространство. Тогда всякое ограниченное $M \subset X$ — слабо относительно компактно.

Доказательство. Докажем в частном случае, когда X — гильбертово пространство. Переформулируем тогда условие теоремы:

Пусть H — гильбертово пространство. Тогда из любой ограниченной последовательности его элементов можно извлечь слабо сходящуюся подпоследовательность.

Пусть $\{x_n\} \subset H$ ограничена. Рассмотрим числовую последовательность $\{(x_n, x_1)\}$. Она будет ограничена. Следовательно, по числовому принципу Больцано-Вейерштрасса

$$\exists \{x_{n_k}\} \subset \{x_n\} \mid \{(x_{n_k}, x_1)\} \text{ — сходится}$$

Обозначим $y_1 = x_{n_1}$. По аналогии рассмотрим $\{(x_{n_k}, x_2)\}$:

$$\exists \{x_{n_{k_l}}\} \subset \{x_{n_k}\} \mid \{(x_{n_{k_l}}, x_2)\} \text{ — сходится}$$

Обозначим $y_2 = x_{n_{k_1}}$. И так далее. В итоге получаем последовательность $\{y_k\}$, причём последовательность $\{(y_k, x_m)\}$ сходится при $k \rightarrow \infty \forall m$, и $\{y_k\}$ является подпоследовательностью $\{x_n\}$.

Покажем, что $\{y_k\}$ — искомая, т.е. $\{y_k\}$ слабо сходится. По теореме 3.7 Рисса о представлении линейного непрерывного функционала это равносильно тому, что $\forall x \in H \{(y_k, x)\}$ — сходится.

Если $x = \sum_{k=1}^n \alpha_k x_k$, то сходимость очевидна. Т.е. на $\text{span}\{x_1, \dots, x_n\}$ сходимость есть.

Рассмотрим замыкание $\overline{\text{span}\{x_1, \dots, x_n\}}$:

$$x = \lim_{l \rightarrow \infty} z_l = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k x_k$$

Заметим, что для $\forall l$ и фиксированном z_l последовательность $\{(y_k, z_l)\}$ сходится при $k \rightarrow \infty$. Обозначим:

$$\alpha_l = \lim_{k \rightarrow \infty} (y_k, z_l)$$

Оценим:

$$\begin{aligned} |\alpha_l - \alpha_{l+p}| &= \left| \lim_{k \rightarrow \infty} (z_l, y_k) - \lim_{k \rightarrow \infty} (z_{l+p}, y_k) \right| = \lim_{k \rightarrow \infty} |(z_l, y_k) - (z_{l+p}, y_k)| = \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} |(z_l - z_{l+p}, y_k)| \leqslant_{(\text{нер-во Коши-Буняковского})} \lim_{k \rightarrow \infty} \|z_l - z_{l+p}\| \cdot \|y_k\| \end{aligned}$$

Последовательность $\{y_k\}$ ограничена, т.к. $\{x_n\}$ ограничена.

Поскольку ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k x_k$ сходится, то по критерию Коши последовательность его частичных сумм является фундаментальной, т.е. величину $\|z_l - z_{l+p}\|$ мы можем сделать сколь угодно малой. Тогда величину $|\alpha_l - \alpha_{l+p}|$ мы также можем сделать сколь угодно малой. Таким образом, $\{\alpha_l\}$ фундаментальна, следовательно, сходится. Обозначим предел через α_0 :

$$\alpha_l \xrightarrow{l \rightarrow \infty} \alpha_0$$

Пусть $\varepsilon > 0$. Поскольку $z_l \xrightarrow{l \rightarrow \infty} x$, то

$$\exists l_0 \in \mathbb{N} \mid \forall l > l_0 : \|x - z_l\| \cdot \|y_k\| < \frac{\varepsilon}{3}$$

Далее для фиксированного l :

$$\begin{aligned} \exists k_0 \mid \forall k > k_0 : |(z_l, y_k) - \alpha_l| &< \frac{\varepsilon}{3} \\ \exists l_1 \mid \forall l > l_1 : |\alpha_l - \alpha_0| &< \frac{\varepsilon}{3} \end{aligned}$$

Получаем:

$$\begin{aligned} |(x, y_k) - \alpha_0| &= |(x, y_k) - (z_l, y_k) + (z_l, y_k) - \alpha_l + \alpha_l - \alpha_0| \leqslant \\ &\leqslant |(x, y_k) - (z_l, y_k)| + |(z_l, y_k) - \alpha_l| + |\alpha_l - \alpha_0| < \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon \text{ при } l > \max(l_0, l_1), k > k_0 \end{aligned}$$

Т.е. $\{(x, y_k)\}$ сходится к α_0 для $\forall x \in \overline{\text{span}\{x_1, \dots, x_n\}}$.

Обозначим $L = \overline{\text{span}\{x_1, \dots, x_n\}}$. Пусть теперь $x \notin L$, т.е. $x \in H \setminus L$. Т.к. L является подпространством H , то по теореме о разложении:

$$x = u + v, \text{ где } u \in L, v \in L^\perp$$

Тогда

$$(x, y_k) = (u, y_k) + (v, y_k) = (u, y_k) + 0 = (u, y_k), \text{ т.к. } y_k \in L$$

Т.е. задача доказательства сходимости последовательности $\{(x, y_k)\}$ сводится к доказательству сходимости последовательности $\{(u, y_k)\}$, где $u, y_k \in L$. Но для такой последовательности сходимость уже доказана, следовательно, $\{y_k\}$ — искомая. □

Утв 4.4. Открытый шар в бесконечномерном пространстве не является относительно компактным множеством.

Упр 4.6. Доказать утверждение 4.4

(Лекция №7, 18.10.2010)

Утв 4.5. Всякое компактное множество в бесконечномерном нормированном пространстве — нигде не плотное множество.

Упр 4.7. Доказать утверждение 4.5. (см. стр. 93)

Утв 4.6. Всякое рефлексивное пространство — слабо полное. (Слабо банахово)

Упр 4.8. Доказать утверждение 4.6. (см. стр. 93)

4.1 Критерии относительной компактности в некоторых функциональных пространствах

В пространстве $C[a, b]$

Опр 4.8. Пусть задано семейство функций $\mathcal{M} \subset C[a, b]$. $\mathcal{M}$ называется равномерно ограниченным, если существует такое K , что

$$\forall f \in \mathcal{M} \forall x \in [a, b] : |f(x)| \leq K$$

Опр 4.9. Семейство функций $\mathcal{M} \subset C[a, b]$ называется равностепенно непрерывным, если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \mid \forall x', x'' \in [a, b], |x' - x''| < \delta, \forall f \in \mathcal{M} : \\ |f(x') - f(x'')| < \varepsilon$$

Замечание 4.2. Если $\mathcal{M}$ состоит всего из одной функции f , то равностепенная непрерывность $\mathcal{M}$ является равномерной непрерывностью f .

Утв 4.7 (Теорема Арцела-Асколи). Множество $\mathcal{M} \subset C[a, b]$ относительно компактно тогда и только тогда, когда оно равномерно ограничено и равностепенно непрерывно.

Замечание 4.3. Теорема справедлива и в случае $\mathcal{M} \subset C[Q]$, где Q — компактное в $\mathbb{R}^n$ множество, или Q — замкнутое ограниченное множество в нормированном пространстве X .

В пространстве $L_p(Q)$, где $p \geq 1$, $Q \subset \mathbb{R}^n$ - ограниченное, измеримое по Лебегу множество. Считаем, что в $\mathbb{R}^n \setminus Q$ функции продолжены нулями.

Опр 4.10. Семейство функций $\mathcal{M} \subset L_p[Q]$ называется равномерно ограниченным, если существует такое K , что

$$\forall f \in \mathcal{M} : \|f\|_{L_p} \leq K$$

Опр 4.11. Семейство функций $\mathcal{M} \subset L_p(Q)$ называется равномерно непрерывным в среднем, если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) \mid \forall h \in \mathbb{R}^n, \|h\| < \delta, \forall f \in \mathcal{M} : \\ \left(\int_Q |f(x+h) - f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} < \varepsilon$$

Утв 4.8 (Теорема Рисса). Множество функций $\mathcal{M} \subset L_p(Q)$ относительно компактно тогда и только тогда, когда оно равномерно ограничено и равномерно непрерывно в среднем.

В пространстве l_p , $p \geq 1$

Утв 4.9. Множество $\mathcal{M} \subset l_p$ является относительно компактным тогда и только тогда, когда $\mathcal{M}$ равномерно ограничено и

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon) \mid \forall x \in \mathcal{M} \text{ выполняется} \\ \left(\sum_{n=N+1}^{\infty} |x_n|^p \right)^{\frac{1}{p}} < \varepsilon$$

5 Теория разрешимости функциональных уравнений

5.1 Уравнения с вполне непрерывными операторами

Опр 5.1. Линейный оператор $A : X \rightarrow Y$ называется вполне непрерывным, если A - непрерывный и A переводит замкнутый единичный шар $\overline{B_1}(0) \subset X$ в относительно компактное в Y множество.

Пример 5.1. В любом бесконечномерном пространстве тождественный оператор не является вполне непрерывным.

Свойства вполне непрерывных операторов:

1. Любой линейный непрерывный оператор $A : X \rightarrow Y$ является вполне непрерывным, если хотя бы одно из пространств X, Y конечномерно.
2. Любой линейный ограниченный функционал является вполне непрерывным оператором.

3. Если $A : X \xrightarrow{\text{на}} Y$, $B : Y \rightarrow Z$ — линейные непрерывные операторы, и хотя бы один из них является вполне непрерывным оператором, то оператор $C = BA$ является вполне непрерывным оператором.

Теорема 5.1. Совокупность всех линейных вполне непрерывных операторов, отображающих X в Y , есть подпространство $\mathcal{L}(X, Y)$

Обозначение: $\sigma(X, Y)$

Доказательство. Очевидно, что $\sigma(X, Y)$ — подмножество $\mathcal{L}(X, Y)$

Упр 5.1. Доказать:

- $A \in \sigma \Rightarrow \lambda A \in \sigma$
- $A, B \in \sigma \Rightarrow (A + B) \in \sigma$

Осталось показать замкнутость σ в $\mathcal{L}$. Пусть $\{A_n\} \subset \sigma$ — семейство операторов и $\{A_n\} \rightarrow A$. Тогда нужно доказать, что $A \in \sigma$.

$A \in \mathcal{L}(X, Y)$ — очевидно (по теореме из второго курса).

Имеем:

$$A_n : \overline{B_1}(0) \rightarrow W_n \text{ (} W_n \text{ относительно компактно в } Y \text{)}$$

Возьмем $\{x_m\} \subset \overline{B_1}(0) \Rightarrow \{x_m\}$ — ограничена. Необходимо доказать, что $\{Ax_m\}$ — относительно компактна. Зададим произвольное $\varepsilon > 0$. Тогда

$$A_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} A;$$

$$\{x_m\} \text{ — ограничена} \Rightarrow \exists n_0 = n_0(\varepsilon) \mid \|A_{n_0}x_m - Ax_m\| < \frac{\varepsilon}{3}$$

Обозначим $y_m = A_{n_0}x_m$. Оператор A_{n_0} вполне непрерывен $\Rightarrow$ из $\{y_m\}$ можно извлечь сходящуюся подпоследовательность $\{y_{m_k}\}$. Причем, $\{y_{m_k}\}$ определяет $\{x_{m_k}\}$.

Покажем, что $\{x_{m_k}\}$ — искомая. То есть, нужно доказать

$$\|Ax_{m_k} - Ax_{m_l}\| \xrightarrow{k, l \rightarrow \infty} 0$$

Имеем

$$\begin{aligned} & \|Ax_{m_k} - Ax_{m_l}\| = \\ & = \|Ax_{m_k} - A_{n_0}x_{m_k} + A_{n_0}x_{m_k} - A_{n_0}x_{m_l} + A_{n_0}x_{m_l} - Ax_{m_l}\| \leq \\ & \leq \|Ax_{m_k} - A_{n_0}x_{m_k}\| + \|A_{n_0}x_{m_k} - A_{n_0}x_{m_l}\| + \|A_{n_0}x_{m_l} - Ax_{m_l}\| < \\ & \text{(при } k, l \rightarrow \infty) < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon \end{aligned}$$

□

Лемма 5.1. X — нормированное пространство. Если $\{x_n\} \subset X$ слабо сходится и относительно компактна, то $\{x_n\}$ сходится по норме.

Доказательство. Пусть $x_n \xrightarrow{\text{слаб.}} x_0$ в X . Докажем от противного. Пусть x_n не сходится к x_0 по норме, что означает

$$\exists \varepsilon_0 \exists \{n_k\} \mid \|x_{n_k} - x_0\| > \varepsilon_0 \forall k.$$

С другой стороны, $\{x_n\}$ относительно компактно, следовательно любая подпоследовательность $\{x_n\}$ относительно компактна, следовательно в $\{x_{n_k}\}$ найдется сходящаяся подпоследовательность $\{x_{n_{k_m}}\}$. Но должно выполняться $\|x_{n_{k_m}} - x_0\| > \varepsilon_0$. Это приводит к противоречию с относительной компактностью $\{x_n\}$. $\square$

Теорема 5.2. Пусть $A : X \rightarrow Y$, A — линейный, вполне непрерывный оператор, X, Y — нормированные пространства, и пусть $\{x_n\}$ — слабо сходящаяся последовательность. Тогда $\{Ax_n\}$ сходится сильно.

Доказательство. Последовательность $\{x_n\}$ сходится слабо $\Rightarrow$ по теореме 3.4 последовательность $\{Ax_n\}$ сходится слабо.

Последовательность $\{x_n\}$ сходится слабо $\Rightarrow$ по теореме 3.5 последовательность $\{\|x_n\|\}$ ограничена. Легко показать, что любое ограниченное множество вполне непрерывный оператор переводит в относительно компактное. Таким образом, получаем, что $\{Ax_n\}$ относительно компактно.

Используя лемму 5.1, получаем требуемое. $\square$

Теорема 5.3. Пусть $A : X \rightarrow Y$ — линейный, вполне непрерывный оператор, отображающий нормированное пространство X в банахово пространство Y .

Тогда $A^* : Y^* \rightarrow X^*$ — тоже вполне непрерывный оператор.

Доказательство. Рассмотрим единичные шары $\overline{B_1} \subset X$ и $\overline{B_1^*} \subset Y^*$.

Возьмём семейство функционалов $\{f_n\} \subset \overline{B_1^*}$, т.е. $\|f_n\| \leq 1$. Нужно доказать, что можно извлечь из $\{A^*f_n\}$ сходящуюся подпоследовательность.

Обозначим $\mathcal{M} = \{f_n(y)\}$. Имеем

$$|f_n(y)| \leq |f_n| \cdot \|y\|$$

Следовательно, $\mathcal{M}$ равномерно ограничено на любом ограниченном подмножестве Y .

Докажем равностепенную непрерывность:

$$|f_n(y') - f_n(y'')| = |f_n(y' - y'')| \leq \|f_n\| \cdot \|y' - y''\| \leq (\|f_n\| \leq 1) \leq \|y' - y''\|$$

Таким образом, получаем

$$\forall n, \forall \varepsilon > 0 : (\|y' - y''\| < \delta(\varepsilon) = \varepsilon) \Rightarrow (\|f_n(y') - f_n(y'')\| < \varepsilon)$$

Поскольку оператор A является вполне непрерывным, то множество $M = A\overline{B_1} \subset Y$ относительно компактно, замкнуто и ограничено $\Rightarrow$ (по усиленной теореме Арцела-Асколи 4.7) $\Rightarrow$

$$\{f_n(y)\}_{y \in M} \text{ — относительно компактно и замкнуто в } C[M]$$

Следовательно, существует сходящаяся в норме $C[M]$ подпоследовательность $\{f_{n_k}\}$.

Имеем

$$\mathcal{M} \subset C[M]$$

Следовательно, $\{f_{n_k}(Ax)\}$ сходится равномерно на $\overline{B_1}$. По определению сопряженного оператора:

$$f_{n_k}(Ax) = (A^* f_{n_k})(x)$$

То есть, $\{A^* f_{n_k}\}$ - семейство функционалов, $\forall x \in \overline{B_1}$ равномерно сходящееся к некоторому функционалу f_0 .

Из равномерной сходимости следует

$$\|(A^* f_{n_k})x - (A^* f_{n_{k+p}})x\| \xrightarrow[k, p \rightarrow \infty]{} 0 \quad \forall x \in \overline{B_1}$$

Распишем по определению:

$$\|A^* f_{n_k} - A^* f_{n_{k+p}}\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|(A^* f_{n_k} - A^* f_{n_{k+p}})x\|$$

Из равномерной сходимости следует, что эту величину можно сделать сколь угодно малой, а значит, последовательность $\{A^* f_{n_k}\}$ фундаментальна, следовательно, она сходится. Таким образом, получаем, что оператор A^* вполне непрерывен. □

Замечание 5.1. Обратное тоже верно, т.е.:

Линейный оператор A вполне непрерывный тогда и только тогда, когда A^* вполне непрерывен.

5.2 Уравнения Фредгольма

Опр 5.2. Пусть $A : X \rightarrow X$ — линейный оператор, X — нормированное пространство. Уравнение

$$x - Ax = y, \quad y \in X$$

называется уравнением Фредгольма второго рода.

Опр 5.3. Уравнение

$$f - A^* f = g, \quad g \in X^*$$

называется сопряженным уравнением Фредгольма второго рода.

Опр 5.4. Уравнение

$$Ax = y$$

называется уравнением Фредгольма первого рода.

Опр 5.5. Если $y = 0$ или $g = 0$, то соответствующее уравнение называется однородным.

Теорема 5.4. Пусть $A : X \rightarrow X$ — линейный, вполне непрерывный оператор, где X — банахово пространство. Тогда множества значений операторов $I - A$ и $I^* - A^*$ замкнуты.

Доказательство. Докажем для $I - A$. (Для $I^* - A^*$ - аналогично). Т.е. нужно доказать, что если $\{y_n\} \subset R(I - A)$ и сходится, то её предел принадлежит $R(I - A)$.

Определим x_n :

$$x_n - Ax_n = y_n$$

Таким образом, по $\{y_n\}$ получили последовательность $\{x_n\} \subset X$. Она может быть либо ограниченной либо неограниченной. Разберём по случаям.

1) Пусть $\{x_n\}$ — ограничена.

Тогда $\{Ax_n\}$ — относительно компактно (из свойств вполне непрерывности), следовательно

$$\exists \{n_k\} \mid \{Ax_{n_k}\} — сходящаяся$$

Имеем

$$\begin{aligned} x_{n_k} - Ax_{n_k} &= y_{n_k} \Rightarrow \\ x_{n_k} &= Ax_{n_k} + y_{n_k} \Rightarrow \{x_{n_k}\} — сходится, т.е. \\ \lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} &= x_0 \in X \text{ (т.к. } X \text{ - банахово)} \end{aligned}$$

Отсюда получаем

$$y_{n_k} \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} x_0 - Ax_0$$

Положим $y_0 = x_0 - Ax_0 \in R(I - A)$. В силу единственности предела получаем

$$y_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} y_0$$

2) Пусть $\{x_n\}$ неограничена.

Обозначим $X_0 = N(I - A)$ — подпространство X .

Определим

$$d_n = \rho(x_n, X_0) = \inf_{z \in X_0} \|x_n - z\|$$

Согласно определению точной нижней грани

$$\forall d_n \exists z_n \in X_0 \mid d_n \leq \|x_n - z_n\| \leq (1 + \frac{1}{n})d_n \quad (*)$$

Имеем:

$$(I - A)(x_n - z_n) = y_n \text{ т.к. } z_n \in X_0 = N(I - A)$$

Рассмотрим два случая:

2.1) $\{d_n\}$ — ограничена.

Тогда $\{\|x_n - z_n\|\}$ — ограничена, в силу (*).

Повторяя рассуждения из пункта **1** для $\tilde{x}_n = x_n - z_n$ получим требуемое.

2.2) $\{d_n\}$ — неограничена.

Покажем, что эта ситуация невозможна. Имеем

$$d_n — неограничена \Rightarrow \exists \{n_k\} \mid d_{n_k} \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} \infty$$

Переобозначив $d_k = d_{n_k}$ будем считать, что $d_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \infty$.

Введём

$$u_n = \frac{x_n - z_n}{\|x_n - z_n\|} — ограничена, \text{ т.к. } \|u_n\| = 1$$

Тогда

$$(I - A)u_n = \frac{y_n}{\|x_n - z_n\|} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0, \text{ т.к. } \|x_n - z_n\| \rightarrow +\infty$$

Множество $\{Au_n\}$ относительно компактно в силу вполне непрерывности A , следовательно

$$\exists \{n_k\} \mid \{Au_{n_k}\} \text{ сходитя к некоторому } Au_0 \text{ при } k \rightarrow \infty$$

Имеем

$$(I - A)u_{n_k} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0 \Rightarrow (I - A)u_0 = 0 \Rightarrow u_0 \in X_0$$

Рассмотрим

$$x_{n_k} - z_{n_k} - \|x_{n_k} - z_{n_k}\|u_0 = \|x_{n_k} - z_{n_k}\|(u_{n_k} - u_0)$$

Имеем

$$z_{n_k} + \|x_{n_k} - z_{n_k}\|u_0 \in X_0, \text{ т.к. } z_{n_k} \in X_0 \text{ и } u_0 \in X_0$$

Тогда получаем

$$\begin{aligned} \|u_{n_k} - u_0\|(1 + \frac{1}{n_k})d_{n_k} &\geq (\star) \geq \|u_{n_k} - u_0\| \cdot \|x_{n_k} - z_{n_k}\| = \\ &= \| (u_{n_k} - u_0)\|x_{n_k} - z_{n_k}\| \| = \|x_{n_k} - \underbrace{(z_{n_k} + \|x_{n_k} - z_{n_k}\|u_0)}_{\in X_0}\| \geq d_{n_k} \end{aligned}$$

Сократив на d_{n_k} , получим

$$\|u_{n_k} - u_0\| \geq \frac{n_k}{n_k + 1} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 1 \quad (\star\star)$$

Легко показать, что $u_{n_k} \rightarrow u_0$, что противоречит $(\star\star)$

□

Теорема 5.5. Пусть $A : X \rightarrow X$ — линейный, вполне непрерывный оператор, где X — банахово пространство. Тогда ядро оператора $I - A$ конечномерно.

Доказательство. Выберем $M \subset N(I - A)$. Очевидно, что $A(M) = M$.

Пусть M ограничено. Т.к. A вполне непрерывен, то $A(M)$ относительно компактно, следовательно, M относительно компактно.

Тогда по теореме Рисса 4.5 получаем, что $N(I - A)$ конечномерно.

□

Следствие 5.1. Линейный, вполне непрерывный оператор A может иметь лишь конечное число линейно независимых собственных элементов, отвечающих собственным значениям λ

$$Ax = \lambda x$$

Доказательство. Достаточно рассмотреть линейный оператор

$$I - \frac{1}{\lambda}A, \quad \lambda \neq 0$$

□

Теорема 5.6. Пусть X — банахово пространство, $A : X \rightarrow X$ — линейный, вполне непрерывный оператор.

Тогда уравнение $Ax - x = y$ разрешимо для любого $y \in X \Leftrightarrow$ сопряженное однородное уравнение $A^*f - f = 0$ имеет только нулевое решение.

Доказательство. $(\Rightarrow)$ Пусть $\forall y \in X \exists x_0 \in X \mid Ax_0 - x_0 = y$.

Докажем, что $A^*f - f = 0 \Leftrightarrow f = 0$.

В левую сторону очевидно, докажем в правую.

Рассмотрим значение f на конкретном элементе y :

$$\begin{aligned} f(y) &= f(Ax_0 - x_0) = f(Ax_0) - f(x_0) = (A^*f)(x_0) - f(x_0) = \\ &= (A^*f - f)(x_0) = (\text{т.к. } f - \text{решение уравнения}) = 0 \end{aligned}$$

$(\Leftarrow)$ Пусть выполняется

$$A^*f - f = 0 \Rightarrow f = 0$$

Докажем от противного. Пусть $\exists y \mid y \notin R(I - A)$

По теореме 5.4 $R(I - A)$ замкнута $\Rightarrow \rho(y, R(I - A)) = d > 0$ Обозначим

$$L = R(I - A)$$

По следствию 3.2 теоремы Хана-Банаха

$$\begin{aligned} \exists f_0 \in X^* \mid f_0(y) = 1, \text{ причем} \\ \|f_0\| = \frac{1}{d} \text{ и } f_0(z) = 0 \quad \forall z \in L \end{aligned}$$

Пусть $x \in X$ произвольный. Рассмотрим

$$f_0(\underbrace{Ax - x}_{\in L}) = (A^*f_0 - f_0)(x) = 0$$

Отсюда следует, что $f_0 = 0$, но это не так. Пришли к противоречию. $\square$

Теорема 5.7. Пусть X — банахово пространство, $A : X \rightarrow X$ — линейный, вполне непрерывный оператор.

Тогда уравнение $A^*f - f = g \in X^*$ разрешимо для данного функционала $g \Leftrightarrow g(x) = 0 \quad \forall x \in N(I - A)$

Доказательство. $(\Rightarrow)$ Пусть $A^*f - f = g$ разрешимо для данного g . Отсюда получаем, что

$$g(x) = (A^*f - f)(x) = f(Ax) - f(x) = f(Ax - x)$$

Возьмём $x \in N(I - A)$, тогда

$$Ax - x = 0 \Rightarrow g(x) = 0$$

$(\Leftarrow)$ Пусть $g(x) = 0 \quad \forall x \in N(I - A)$

Определим

$$L = \{y \mid y = Ax - x, x \in X\} - \text{подпространство } X$$

Введём

$$f_0(y) = g(x)$$

Нужно доказать корректность определения функционала f_0 .

Предположим, что $\exists x_1 \mid Ax_1 - x_1 = y$, причём $y = Ax - x$. Рассмотрим разность

$$\begin{aligned} A(x_1 - x) - (x_1 - x) &= 0 \Rightarrow (x_1 - x) \in N(A - I) \Rightarrow \\ \Rightarrow g(x_1 - x) &= 0 = g(x_1) - g(x) \Rightarrow g(x) = g(x_1) \end{aligned}$$

Линейность f_0 очевидна, докажем ограниченность. Пусть x_0 такой, что $Ax_0 - x_0 = y$ ($y \in L \Rightarrow$ такой x_0 существует). Пусть $z \in N(A - I)$. Тогда множество $\{x_0 + z\}$ описывает все решения уравнения $Ax - x = y$.

Пусть x - решение уравнения $Ax - x = y$, тогда x можно представить в виде

$$x = x_0 + z$$

Введём

$$\varphi(z) = \|x_0 + z\|$$

Обозначим

$$d = \inf_{z \in N(A-I)} \varphi(z)$$

По определению точной нижней грани, существует последовательность $\{z_n\} \mid \varphi(z_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} d$.

Рассмотрим последовательность $\{x_0 + z_n\}$. Т.к. $\varphi(z_n)$ сходится, то $\{x_0 + z_n\}$ ограничена, а значит и $\{z_n\}$ — ограничена.

По теореме 5.5 $N(A - I)$ — конечномерно, следовательно, оно гильбертово и, следовательно, рефлексивно. Тогда по теореме 4.7

$$\exists \{n_k\} \mid z_{n_k} \text{ сходится слабо}$$

Т.к. $N(A - I)$ конечномерно, то, согласно упр. 3.1, слабая сходимость z_{n_k} эквивалентна сильной, значит

$$z_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} z_0 \in N(A - I)$$

Тогда

$$\varphi(z_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \varphi(z_0) \Rightarrow \varphi(z_0) = d$$

Т.е. точная нижняя грань достигается.

Обозначим

$$\tilde{x} = x_0 + z_0 \text{ — решение с минимальной нормой уравнения } Ax - x = y$$

Положим

$$f_0(y) = g(\tilde{x})$$

Нужно доказать, что

$$\exists M > 0 \mid |f_0(y)| \leq M\|y\|$$

Но т.к. g - ограничен, то

$$|f_0(y)| = |g(\tilde{x})| \leq K\|\tilde{x}\|, \text{ где } K - \text{некоторая константа}$$

Докажем, что

$$\exists \alpha > 0 \mid \|\tilde{x}\| \leq \alpha \|y\| \quad (\text{Отсюда и будет следовать требуемое})$$

Докажем от противного. (Предположим, что $y \neq 0$, иначе всё очевидно). Рассмотрим выражение

$$\frac{\|\tilde{x}\|}{\|y\|}$$

Предположим, что оно неограничено, т.е.

$$\exists \{y_n\} \subset L \mid \text{для соответствующих } \tilde{x}_n : \frac{\|\tilde{x}_n\|}{\|y_n\|} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty \quad (\star)$$

Определим

$$\begin{aligned} \tilde{\tilde{x}}_n &= \frac{\tilde{x}_n}{\|\tilde{x}_n\|} \\ \tilde{y}_n &= \frac{y_n}{\|\tilde{x}_n\|} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \text{ в силу } (\star) \end{aligned}$$

Оператор A — вполне непрерывен, следовательно, из последовательности $\{A\tilde{\tilde{x}}_n\}$ можно извлечь сходящуюся подпоследовательность. Переобозначим индексы и будем считать, что $\{A\tilde{\tilde{x}}_n\}$ сходится:

$$A\tilde{\tilde{x}}_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} A\tilde{x}_0$$

Имеем:

$$A\tilde{x}_n - \tilde{x}_n = y_n$$

Поделим на $\|\tilde{x}_n\|$, ($\|\tilde{x}_n\| \neq 0$ в силу $\frac{\|\tilde{x}_n\|}{\|y_n\|} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$):

$$A\tilde{\tilde{x}}_n - \tilde{\tilde{x}}_n = \tilde{y}_n$$

Перейдя к пределу при $n \rightarrow \infty$ получим

$$A\tilde{x}_0 - \tilde{x}_0 = 0 \Rightarrow \tilde{x}_0 \in N(A - I)$$

Рассмотрим

$$(A - I)(\tilde{x}_n - \|\tilde{x}_n\|\tilde{x}_0) = (A - I)\tilde{x}_n = y_n$$

При этом $\tilde{x}_n$ имеет наименьшую норму среди $\{x \mid Ax - x = y_n\}$.

Отсюда

$$\|\tilde{x}_n - \|\tilde{x}_n\| \cdot \tilde{x}_0\| \geq \|\tilde{x}_n\|$$

Поделим выражение на $\|\tilde{x}_n\|$:

$$\|\tilde{\tilde{x}}_n - \tilde{x}_0\| \geq 1$$

А это противоречит $\tilde{\tilde{x}}_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \tilde{x}_0$

Таким образом, ограниченность f_0 доказана.

(Лекция №9, 01.11.2010)

Продолжим f_0 с L на X (по теореме 3.1 это возможно). Получаем новый функционал $f \in X^*$.

Пусть $x \in X$, тогда

$$f(Ax - x) = f(y) = (y \in L) = f_0(y) = g(x)$$

С другой стороны, по определению сопряжённого оператора

$$(A^*f - f)(x) = f(Ax - x)$$

Таким образом

$$A^*f - f = g$$

Т.е. построили решение уравнения для данного g .

□

Следствие 5.2. Если $Ax - x = 0$ имеет только нулевое решение, то уравнение $A^*f - f = g$ разрешимо для любого g .

Доказательство. Имеем

$$Ax - x = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

Следовательно, ядро содержит только нулевой элемент, но $\forall g \in X^*$ выполняется: $g(0) = 0$. Тогда по теореме уравнение $A^*f - f = g$ разрешимо для любого функционала g .

□

Теорема 5.8. Пусть X — банахово пространство, $A : X \rightarrow X$ — линейный, вполне непрерывный оператор.

Тогда для того, чтобы уравнение $Ax - x = y$ было разрешимо при любом $y \in X$ необходимо и достаточно, чтобы однородное уравнение имело только нулевое решение.

При этом, оператор $(A - I)$ будет непрерывно обратим.

Доказательство. Обозначим

$$N_k = N((A - I)^k), \text{ где } k \in \mathbb{N}$$

Очевидно, что $\forall k :$

$$N_k \subseteq N_{k+1}$$

Необходимость. Пусть уравнение $Ax - x = y$ разрешимо для $\forall y$. Будем доказывать от противного: предположим, что уравнение $Ax - x = 0$ имеет ненулевое решение.

Выберем одно такое решение: $x_1 \neq 0$. Введём последовательность $\{x_k\}$ по правилу:

$$x_{k+1} - \text{решение уравнения } \underbrace{Ax - x = x_k}_{\substack{\text{разрешимо} \\ \text{по условию}}}$$

Имеем

$$\begin{aligned} (A - I)x_k &= x_{k-1} \\ (A - I)^2 x_k &= x_{k-2} \\ (A - I)^k x_k &= (A - I)x_1 = 0 \end{aligned}$$

Получаем, что $x_k \in N_k$. Т.к. $x_1 \neq 0$, то x_2 — решение уравнения $Ax - x = x_1$, тоже не равно нулевому элементу. Следовательно $x_k \notin N_{k-1}$. Таким образом, получили строгое вложение N_k . По лемме Рисса о почти перпендикуляре 4.1 для $N_{k-1} \subset N_k$ получаем:

$$\exists z_k \in N_k \mid z_k \notin N_{k-1}, \quad \|z_k\| = 1, \quad \|z_k - x\| \geq \frac{1}{2} \quad \forall x \in N_{k-1}$$

Т.к. оператор A вполне непрерывен, то из последовательности $\{Az_k\}$ можно извлечь сходящуюся подпоследовательность.

С другой стороны, рассмотрим z_k и z_{k+m} , при $m > 0$

$$\begin{aligned} & (A - I)^{k+m-1}(z_k - (A - I)z_{k+m} + (A - I)z_k) = \\ & = \underbrace{(A - I)^{k+m-1}z_k}_{N_k \subset N_{k+m-1}} - \underbrace{(A - I)^{k+m}z_{k+m}}_{z_{k+m} \in N_{k+m}} + \underbrace{(A - I)^{k+m}z_k}_{N_k \subset N_{k+m}} = 0 \end{aligned}$$

Таким образом, получаем

$$z_k - (A - I)z_{k+m} + (A - I)z_k \in N_{k+m-1}$$

Рассмотрим

$$\begin{aligned} \|Az_{k+m} - Az_k\| &= \|z_{k+m} - z_k + (A - I)z_{k+m} - (A - I)z_k\| = \\ &= \|z_{k+m} - \underbrace{(z_k - (A - I)z_{k+m} + (A - I)z_k)}_{\in N_{k+m-1}}\| \geq \\ &\geq (\text{по опр. элементов } z_k) \geq \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Т.е. $\{Az_k\}$ не является фундаментальной, как и любая её подпоследовательность. Пришли к противоречию с вполне непрерывностью оператора A .

Достаточность. Пусть выполняется $Ax - x = 0 \Leftrightarrow x = 0$. Тогда по следствию 5.2 уравнение $A^*f - f = g$ разрешимо для $\forall g \in X^*$.

По теореме 5.3 оператор A^* является вполне непрерывным. Тогда из уже доказанной необходимости следует, что уравнение $A^*f - f = 0$ имеет только нулевое решение. Тогда по теореме 5.6 уравнение $Ax - x = y$ разрешимо $\forall y$.

Обратимость. Оператор $(A - I)$ взаимно однозначен, следовательно, по теореме об обратном операторе (теорема 2.4) непрерывно обратим. $\square$

Теорема 5.9. Пусть X — банахово пространство, $A : X \rightarrow X$ — линейный, вполне непрерывный оператор.

Тогда однородные уравнения $Ax - x = 0$, $A^*f - f = 0$ имеют одинаковое число линейно независимых решений.

Доказательство. Имеем

$$N(A - I), N(A^* - I^*) \text{ — совокупности решений однородных уравнений}$$

По теореме 5.5 они конечномерны $\Rightarrow$ существуют базисы $x_1 \dots x_n$ и $f_1 \dots f_m$.

► Предположим, что $n < m$.

Построим для $x_1 \dots x_n$ биортосистему $\varphi_1 \dots \varphi_n \in X^* \mid \varphi_i(x_j) = \delta_i^j$. Аналогично для $f_1 \dots f_m$:

$$z_1 \dots z_m \in X \mid f_i(z_j) = \delta_i^j$$

Построим оператор U по правилу:

$$Ux = Ax + \sum_{i=1}^n \varphi_i(x) z_i$$

Согласно свойству 2 вполне непрерывных операторов, $\forall i$ φ_i является вполне непрерывным. Получаем, что U вполне непрерывен.

Необходимо доказать, что $Ux - x = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Пусть x_0 — решение, т.е. $Ux_0 - x_0 = 0$. Докажем, что $x_0 = 0$.

Рассмотрим

$$f_k(Ux_0 - x_0) = f_k(0) = 0$$

С другой стороны

$$\begin{aligned} f_k(Ux_0 - x_0) &= f_k \left(Ax_0 - x_0 + \sum_{i=1}^n \varphi_i(x_0) z_i \right) = \\ &= f_k(Ax_0 - x_0) + \sum_{i=1}^n f_k(z_i) \varphi_i(x_0) = (f, z - \text{биортогональны}) = \\ &= f_k(Ax_0 - x_0) + \varphi_k(x_0) = (A^* f_k - f_k)(x_0) + \varphi_k(x_0) = \\ &= (\text{т.к. } f_k \in N(A^* - I^*)) = \varphi_k(x_0) \end{aligned}$$

Таким образом

$$\varphi_k(x_0) = 0 \quad \forall k \in \{1 \dots n\}$$

Отсюда

$$Ux_0 - x_0 = Ax_0 - x_0 + \sum_{i=1}^n \underbrace{\varphi_i(x_0)}_{=0} z_i = Ax_0 - x_0 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_0 \in N(A - I) \Rightarrow \text{разложим по базису:}$$

$$x_0 = \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i$$

Имеем

$$\varphi_k(x_0) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \varphi_k(z_i) = \alpha_k = 0 \quad \forall k \in \{1 \dots n\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_0 = \sum_{i=1}^n 0 \cdot x_i = 0$$

Таким образом, доказали, что $Ux - x = 0 \Leftrightarrow x = 0$. По теореме 5.8 уравнение $Ux - x = y$ разрешимо $\forall y$. Выберем в качестве y элемент z_{n+1} , и обозначим через x' решение уравнения $Ux - x = z_{n+1}$.

Рассмотрим

$$\begin{aligned}
f_{n+1}(z_{n+1}) &= f_{n+1}(Ax' - x' + \sum_{i=1}^n \varphi_i(x')z_i = \\
&= f_{n+1}(Ax' - x') + \sum_{i=1}^n \varphi_i(x')f_{n+1}(z_i) = \\
&= (f, z\text{---биортогональны}) = f_{n+1}(Ax' - x') + 0 = \\
&= (A^*f_{n+1} - f_{n+1})x' = (f_{n+1} \in N(A^* - I^*)) = 0
\end{aligned}$$

Но, с другой стороны

$$f_{n+1}(z_{n+1}) = 1$$

Пришли к противоречию. Следовательно, $n \geq m$.

► Предположим, что $n > m$.

Введём оператор U^* :

$$U^*f = A^*f + \sum_{i=1}^m f(z_i)\varphi_i \in X^*$$

Тогда U^* вполне непрерывен.

Докажем, что $U^*f - f = 0 \Leftrightarrow f = 0$. Пусть f_0 — решение однородного уравнения $U^*f - f = 0$.

Рассмотрим

$$\begin{aligned}
(U^*f_0 - f_0)x_k &= (A^*f_0 - f_0)x_k + \sum_{i=1}^m f_0(z_i)\varphi_i(x_k) = f_0(Ax_k - x_k) + \\
&+ \sum_{i=1}^m f_0(z_i)\varphi_i(x_k) = (x_k \in N(A - I)) = 0 + \sum_{i=1}^m f_0(z_i)\varphi_i(x_k) = \\
&= (\varphi, x\text{---биортогональны}) = f_0(z_k) \quad \forall k \in \{1 \dots m\}
\end{aligned}$$

Получаем

$$f_0(z_k) = (U^*f_0 - f_0)x_k = 0 \quad \forall k \in \{1 \dots m\}$$

Тогда

$$\begin{aligned}
U^*f_0 - f_0 &= A^*f_0 - f_0 + \sum_{i=1}^m f_0(z_i)\varphi_i = 0 \Rightarrow \\
&\Rightarrow A^*f_0 - f_0 = 0 \Rightarrow f_0 \in N(A^* - I^*) \Rightarrow \\
&\Rightarrow \text{можно разложить по базису: } f_0 = \sum_{j=1}^m \beta_j f_j
\end{aligned}$$

Рассмотрим

$$f_0(z_k) = 0 = \sum_{j=1}^m \beta_j f_j(z_k) = \beta_k \Rightarrow f_0 = \sum_{j=1}^m 0 \cdot f_j = 0$$

Т.е. уравнение $U^*f = f = 0$ имеет только нулевое решение. Тогда по теореме 5.8 уравнение $U^*f - f = g$ разрешимо $\forall g \in X^*$.

Выберем в качестве g элемент φ_{m+1} , и обозначим через f' решение уравнения $U^*f - f = \varphi_{m+1}$. Тогда

$$\begin{aligned}\varphi_{m+1}(x_{m+1}) &= 1 = (U^*f' - f')x_{m+1} = (A^*f' - f' + \sum_{i=1}^m f'(z_i)\varphi_i)x_{m+1} = \\ &= (A^*f' - f')x_{m+1} + \sum_{i=1}^m f'(z_i)\varphi_i(x_{m+1}) = (\varphi, x - \text{биортогональны}) = \\ &= f'(Ax_{m+1} - x_{m+1}) + 0 = (x_{m+1} \in N(A - I)) = f'(0) = 0\end{aligned}$$

Пришли к противоречию, следовательно, $n \not\geq m$.

Таким образом, получаем, что $n = m$. Т.е. однородные уравнения $Ax - x = 0$ и $A^*f - f = 0$ имеют одинаковое число линейно независимых решений.

□

Теорема 5.10. Пусть X — банахово пространство, $A : X \rightarrow X$ — линейный, вполне непрерывный оператор.

Тогда для того, чтобы уравнение $Ax - x = y$ было разрешимо для данного y необходимо и достаточно, чтобы для любого $f \in X^*$ такого, что $A^*f - f = 0$ выполнялось

$$f(y) = 0$$

Доказательство. 1 случай. Пусть $N(A - I)$ содержит только нулевой элемент. Тогда по теореме 5.8 уравнение $Ax - x = y$ разрешимо для любого y . Следовательно, по теореме 5.6 уравнение $A^*f - f = 0$ имеет только нулевое решение f , т.е. $f(y) = 0 \forall y$.

(Лекция №10, 08.11.2010)

2 случай. Пусть $N(A - I) \neq \{0\}$

($\Rightarrow$) Пусть $Ax - x = y$ разрешимо для y , x_0 — решение этого уравнения. И пусть $f \in N(A^* - I^*)$, т.е. $A^*f - f = 0$
Имеем:

$$f(y) = f(Ax_0 - x_0) = (A^*f - f)x_0 = 0$$

($\Leftarrow$) Пусть для данного $y \in X$ выполняется

$$f(y) = 0 \quad \forall f \in N(A^* - I^*)$$

Докажем от противного. Пусть уравнение $Ax - x = y$ неразрешимо. С другой стороны, по теореме 5.4 $L = R(A - I)$ замкнуто, следовательно, L — подпространство X .

По следствию 3.1 теоремы Хана-Банаха

$$\exists f_0 \in X^* \mid f_0(y) = 1; f_0(Ax - x) = 0$$

Имеем:

$$\begin{aligned}f_0(Ax - x) &= (A^*f_0 - f_0)(x) = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow f_0 &\in N(A^* - I^*) \Rightarrow \text{по условию} \\ &\Rightarrow f_0(y) = 0\end{aligned}$$

Но по построению $f_0(y) = 1$, пришли к противоречию.

□

Теорема 5.11 (Альтернатива Фредгольма). Пусть X — банахово пространство, $A : X \rightarrow X$ — линейный, вполне непрерывный оператор.

Тогда уравнения $Ax - x = y$, $A^*f - f = g$ либо одновременно разрешимы для $\forall y, g$, и, при этом, однородные уравнения $Ax - x = 0$ и $A^*f - f = 0$ имеют лишь нулевые решения, либо однородные уравнения имеют одинаковое число линейно независимых решений, и в этом случае для того, чтобы уравнение $Ax - x = y$ или уравнение $A^*f - f = g$ имело решение для данного y или g , необходимо и достаточно, чтобы

$$f(y) = 0 \quad \forall f \in N(A^* - I^*)$$

или же

$$g(x) = 0 \quad \forall x \in N(A - I)$$

Упр 5.2. Доказать теорему 5.11

5.2.1 Уравнение Фредгольма первого рода

$A : X \rightarrow Y$ — линейный, вполне непрерывный оператор.

Теорема 5.12. Пусть X, Y — бесконечномерные нормированные пространства, Y — банахово. Тогда $R(A)$ не является замкнутым множеством.

Доказательство. Докажем от противного. Пусть $R(A)$ замкнуто, следовательно, $R(A)$ — подпространство в Y , значит $R(A)$ — банахово.

Представим X в виде

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n(0)$$

Докажем, что

$$R(A) = \bigcup_{n=1}^{\infty} A(B_n(0)) \text{ — бесконечномерное многообразие}$$

Имеем

$$\begin{aligned} R(A) &= A(X) = A\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i(0)\right) = A\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \bigcup_{i=1}^n B_i(0)\right) = (A \text{ непрерывен}) = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} A\left(\bigcup_{i=1}^n B_i(0)\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \bigcup_{i=1}^n A(B_i(0)) = \bigcup_{i=1}^{\infty} A(B_i(0)) \end{aligned}$$

Оператор A вполне непрерывен, следовательно, $A(B_i(0))$ относительно компактно.

По утверждению 4.5 любое относительно компактное множество бесконечномерного пространства нигде не плотно ($A R(A)$ — бесконечномерно). То есть, $R(A)$ представляется как счетное объединение нигде не плотных множеств, следовательно, $R(A)$ — пространство первой категории, что противоречит теореме 1.4 $\square$

Теорема 5.13. Пусть $A : X \rightarrow Y$ — линейный, вполне непрерывный оператор. X — бесконечномерное нормированное пространство, Y — нормированное пространство, и пусть оператор A обратим, т.е. существует $A^{-1} : R(A) \rightarrow X$

Тогда A^{-1} неограничен.

Доказательство. Докажем от противного. Пусть A^{-1} ограничен.

С одной стороны, $A^{-1}A = I$ — единичный оператор пространства X не является вполне непрерывным, т.к. X бесконечномерно.

Но с другой стороны, оператор $A^{-1}A$ вполне непрерывен по 3 свойству вполне непрерывных операторов (т.к. A вполне непрерывен, а A^{-1} непрерывен). Пришли к противоречию. $\square$

Следствие 5.3. Пусть X — бесконечномерное банахово пространство, $A : X \rightarrow X$ — линейный, вполне непрерывный оператор.

Тогда обязательно найдется $y \in X$ такой, что уравнение $Ax = y$ не имеет решений.

Доказательство. Докажем от противного. Пусть уравнение $Ax = y$ разрешимо $\forall y$. Значит, существует A^{-1} . По теореме 2.4 A^{-1} ограничен, что противоречит теореме 5.13. $\square$

5.3 Метод малого параметра

Вспомним замечание 2.2:

В пространстве линейных, ограниченных операторов множество непрерывно обратимых операторов — открытое множество. То есть, если $\exists A^{-1}$ и B — ограничен, то $A + \lambda B$ — обратим при малых λ .

5.3.1 Аналитический подход

Пусть X, Y — нормированные пространства. Пусть задано семейство

$$\begin{aligned} A(\lambda) &\in \mathcal{L}(X, Y) \\ \lambda &\in (-R_0, R_0) \end{aligned}$$

и семейство правых частей: $\{y(\lambda)\}$.

Рассмотрим уравнение

$$A(\lambda)x = y(\lambda)$$

Пусть семейства $A(\lambda)$ и $y(\lambda)$ — аналитичны по λ (т.е. разложимы в сходящийся ряд Тейлора):

$$\begin{aligned} A(\lambda) &= \sum_{k=0}^{\infty} A_k \lambda^k \\ y(\lambda) &= \sum_{k=0}^{\infty} y_k \lambda^k \\ A_k &\in \mathcal{L}(X, Y); \quad y_k \in Y \end{aligned}$$

Под сходимостью ряда $\sum_{k=0}^{\infty} A_k \lambda^k$ понимается сходимость числового ряда

$$\sum_{k=0}^{\infty} \|A_k\| \cdot |\lambda|^k < \infty, \quad \forall \lambda \in (-R_1, R_1)$$

Аналогично для $y(\lambda)$:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \|y_k\| |\lambda|^k < \infty, \forall \lambda \in (-R_2, R_2)$$

Рассмотрим

$$\|[A(\lambda) - A(0)]A^{-1}(0)\| \leq \|A(\lambda) - A(0)\| \cdot \underbrace{\|A^{-1}(0)\|}_{\text{число}}$$

В силу непрерывности $A(\lambda)$ по λ , выражение $\|A(\lambda) - A(0)\|$ мы можем сделать сколь угодно малым, тогда

$$\exists \rho_0 > 0 \mid \forall \lambda, |\lambda| < \rho_0 : \|[A(\lambda) - A(0)]A^{-1}(0)\| < 1$$

Здесь мы предполагаем, что $\exists A^{-1}(0)$, т.е. уравнение $A(0)x = y(0)$ разрешимо.

Представим $A(\lambda)$ в виде

$$A(\lambda) = (I + [A(\lambda) - A(0)]A^{-1}(0)) A(0)$$

Рассмотрим такие λ , что $|\lambda| < \rho_0$. Тогда оператор $(I + [A(\lambda) - A(0)]A^{-1}(0))$ непрерывно обратим по теореме 2.2, а оператор $A(0)$ непрерывно обратим по условию, следовательно, $A(\lambda)$ непрерывно обратим. Таким образом, уравнение $A(\lambda)x = y(\lambda)$ разрешимо при $|\lambda| < \rho_0$.

Поиск решения $x(\lambda)$

Будем искать аналитически

$$x = \sum_{k=0}^{\infty} x_k \lambda^k$$

т.е. нужно найти x_k

Имеем

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} A_k \lambda^k \right) x = \left(\sum_{k=0}^{\infty} A_k \lambda^k \right) \cdot \left(\sum_{k=0}^{\infty} x_k \lambda^k \right) = \sum_{k=0}^{\infty} y_k \lambda^k$$

Пусть $\lambda=0$. Тогда:

$$A_0 x_0 = y_0, \text{ где } A_0 - \text{обратим} \Rightarrow x_0 = A_0^{-1} y_0 - \text{найденно}$$

Остальные находим последовательным приравниванием коэффициентов при одинаковых степенях:

$$A_0 x_1 + A_1 x_0 = y_1 \Rightarrow x_1 = A_0^{-1} (y_1 - A_1 x_0)$$

...

$$\sum_{k=0}^n A_k x_{n-k} = y_n$$

5.3.2 Метод продолжения по параметру

Теорема 5.14. Пусть X, Y — банаховы пространства, и пусть задано семейство непрерывных по λ операторов $\{A(\lambda)\}_{\lambda \in [0,1]}$, $A(\lambda) : X \rightarrow Y$. Пусть $A(0)$ непрерывно обратим, и пусть

$$\forall x \in X \forall \lambda \in [0, 1] : \|A(\lambda)x\| \geq \gamma\|x\|, \gamma > 0$$

Тогда $A(1)$ непрерывно обратим.

Замечание 5.2. Более того, справедлива оценка:

$$\|A^{-1}(1)\| \leq \frac{1}{\gamma}$$

Доказательство. Докажем методом топологической индукции, основанной на следующем принципе:

Пусть $E \subseteq [0, 1]$ и справедливо

- 1) $E \neq \emptyset$
- 2) E — замкнуто в $[0, 1]$
- 3) E — открыто в $[0, 1]$

Тогда $E = [0, 1]$.

Обозначим $\Lambda = \{\lambda \mid \lambda \in [0, 1], A(\lambda) \text{ непрерывно обратим}\}$

1) Λ не пусто, т.к. $0 \in \Lambda$ по условию.

3) Докажем открытость Λ , т.е.

$$\lambda_0 \in \Lambda \Rightarrow \lambda_0 + \tilde{\lambda} \in \Lambda \text{ при малых } |\tilde{\lambda}|$$

Т.к. $\lambda_0 \in \Lambda$, значит, $A(\lambda_0)$ непрерывно обратим. Получаем:

$$\begin{aligned} \|A(\lambda_0)x\| &\geq \gamma\|x\| \text{ (по условию)} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \|y\| \geq \gamma\|A^{-1}(\lambda_0)y\| \Rightarrow \\ &\Rightarrow \|A^{-1}(\lambda_0)y\| \leq \frac{1}{\gamma}\|y\| \Rightarrow \\ &\Rightarrow \|A^{-1}(\lambda_0)\| \leq \frac{1}{\gamma} \end{aligned}$$

Отсюда:

$$\|[A(\lambda) - A(\lambda_0)]A^{-1}(\lambda_0)\| \leq \|A(\lambda) - A(\lambda_0)\| \cdot \|A^{-1}(\lambda_0)\| \leq \frac{1}{\gamma}\|A(\lambda) - A(\lambda_0)\|$$

Семейство $A(\lambda)$ непрерывно в операторной норме, т.е.

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \mid (|\lambda - \lambda_0| < \delta) \Rightarrow \|A(\lambda) - A(\lambda_0)\| < \varepsilon$$

Возьмем такое ε , что $\varepsilon < \gamma$. Тогда:

$$\|[A(\lambda) - A(\lambda_0)]A^{-1}(\lambda_0)\| < 1$$

Представим $A(\lambda)$ в виде:

$$A(\lambda) = (I + [A(\lambda) - A(\lambda_0)]A^{-1}(\lambda_0))A(\lambda_0)$$

Имеем:

$$\begin{aligned} & \| [A(\lambda) - A(\lambda_0)] A^{-1}(\lambda_0) \| < 1 \Rightarrow \text{по теореме 2.2} \\ & \Rightarrow (I + [A(\lambda) - A(\lambda_0)] A^{-1}(\lambda_0)) \text{ непрерывно обратим} \end{aligned}$$

Оператор $A(\lambda_0)$ непрерывно обратим по условию, значит, $A(\lambda)$ непрерывно обратим при $|\lambda - \lambda_0| < \delta$ как суперпозиция непрерывно обратимых. Открытость доказана.

2) Докажем замкнутость Λ , т.е. необходимо доказать

$$\lambda_n \in \Lambda, \lambda_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \lambda_0 \Rightarrow \lambda_0 \in \Lambda$$

Т.к. $\lambda_n \in \Lambda$, то $A(\lambda_n)$ непрерывно обратим. Проведя рассуждения как в пункте **3** получим:

$$\|A^{-1}(\lambda_n)\| \leq \frac{1}{\gamma}$$

Тогда из того, что $\lambda_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \lambda_0$ и $A(\lambda)$ непрерывен по λ получаем:

$$\begin{aligned} & \| [A(\lambda_0) - A(\lambda_n)] A^{-1}(\lambda_n) \| \leq \\ & \leq \|A(\lambda_0) - A(\lambda_n)\| \cdot \|A^{-1}(\lambda_n)\| < 1 \text{ (при больших } n) \end{aligned}$$

Представим $A(\lambda_0)$ в виде:

$$A(\lambda_0) = [I + [A(\lambda_0) - A(\lambda_n)] A^{-1}(\lambda_n)] A(\lambda_n)$$

Аналогично пункту **3** получаем, что $A(\lambda_0)$ — непрерывно обратимый оператор, следовательно, $\lambda_0 \in \Lambda$.

В силу топологической индукции $\Lambda = [0, 1]$. □

Замечание 5.3. Оценка $\|A^{-1}(1)\| \leq \frac{1}{\gamma}$ получается из доказанной оценки $\|A^{-1}(\lambda_0)\| \leq \frac{1}{\gamma}$ при $\lambda_0 = 1$

(Лекция №11, 15.11.2010)

Следствие 5.4. Пусть X, Y — банаховы пространства, и пусть задано семейство непрерывных по λ операторов $\{A(\lambda)\}_{\lambda \in [0,1]}$, $A(\lambda) : X \rightarrow Y$. Пусть для всевозможных решений уравнений $A(\lambda)x = y$ выполняется оценка

$$\|x\| \leq K\|y\|,$$

и пусть существует $A^{-1}(0)$.

Тогда $\forall \lambda \in [0, 1]$ существует $A^{-1}(\lambda)$.

Доказательство.

$$\|A(\lambda)x\| \geq \gamma\|x\| \text{ эквивалентно } \|x\| \leq K\|y\|; A(\lambda)x = y$$

По теореме 5.14 получаем требуемое. □

5.4 Теорема Шаудера и следствия из нее

Опр 5.6. Оператор A называется вполне непрерывным на множестве D , если он непрерывен на D и любое ограниченное подмножество D он переводит в относительно компактное множество.

Теорема 5.15 (Шаудера). Пусть X — банахово пространство. Оператор A отображает замкнутое, ограниченное, выпуклое множество $D \subset X$ в себя, A вполне непрерывен на D .

Тогда оператор A имеет в D хотя бы одну неподвижную точку:

$$Ax = x$$

Без доказательства.

Теорема 5.16. Пусть X — банахово пространство. Если непрерывный оператор A переводит замкнутое, выпуклое множество $D \subset X$ в своё относительно компактное подмножество D_0 , то оператор A имеет неподвижную точку.

Доказательство.

Упр 5.3. Доказать, что множество D_0 ограничено (воспользоваться теоремой Хаусдорфа 4.3).

Тогда

$$\exists R \mid \overline{B_R}(0) \supset D_0$$

Обозначим

$$D_1 = \overline{B_R}(0) \cap D$$

Множество D_1 ограничено, замкнуто (как пересечение замкнутых) и выпукло (как пересечение выпуклых). Имеем:

$A : D_1 \rightarrow D_1 \Rightarrow$ по теореме 5.15 A имеет на D_1 неподвижную точку

$D_1 \subset D \Rightarrow$ на всём D оператор A имеет неподвижную точку. □

Теорема 5.17. Пусть X — банахово пространство и пусть задан оператор $A : \overline{B_R}(0) \rightarrow X$, вполне непрерывный на $\overline{B_R}(0)$. Если $\forall \lambda > 1$ и $\forall x \in \overline{B_R}(0)$ выполняется

$$Ax \neq \lambda x,$$

то оператор A имеет на $\overline{B_R}(0)$ неподвижную точку.

Доказательство. Определим

$$F(x) = \begin{cases} Ax, & \text{если } \|Ax\| \leq R \\ \frac{RAx}{\|Ax\|}, & \text{иначе} \end{cases}$$

Очевидно, что

$$F : \overline{B_R}(0) \rightarrow \overline{B_R}(0)$$

Упр 5.4. Доказать, что F — вполне непрерывен на $\overline{B_R}(0)$ (использовать вполне непрерывность операторов A , $\|\cdot\|$).

Отсюда, по теореме 5.15

$$\exists x_0 \mid F(x_0) = x_0, \|x_0\| \leq R$$

Возможны два случая:

- а) $F(x_0) = Ax_0 \Rightarrow x_0$ — неподвижная точка A .
 б) $F(x_0) = \frac{RAx_0}{\|Ax_0\|}$. Покажем, что это невозможно.

Имеем:

$$\begin{aligned} \|Ax_0\| &> R \\ Ax_0 &= \frac{\|Ax_0\|}{R} F(x_0) = \frac{\|Ax_0\|}{R} x_0 = \lambda x_0, \text{ где } \lambda > 1 \\ \|x_0\| &= \|F(x_0)\| = \left\| \frac{RAx_0}{\|Ax_0\|} \right\| = R \end{aligned}$$

Т.е. нашлись такие $x \in S_R(0)$ и $\lambda > 1$, что $Ax = \lambda x$. Пришли к противоречию с условием.

□

Теорема 5.18. Пусть X — банахово пространство и пусть задан вполне непрерывный оператор $A : \overline{B_R}(0) \rightarrow X$.

Если $\forall x, \|x\| = R$ выполняется $\|Ax\| \leq \|x\|$, то оператор A имеет в $\overline{B_R}(0)$ хотя бы одну неподвижную точку.

Доказательство. Выполняется один из двух случаев:

- а) $\exists x_0 \mid Ax_0 = x_0, \|x_0\| = R$.
 б) $Ax \neq x \forall x, \|x\| = R$.

Из а следует существование неподвижной точки.

Рассмотрим случай б. Покажем, что выполняются условия предыдущей теоремы:

$$Ax \neq \lambda x, \lambda > 1, \|x\| = R$$

Докажем от противного — пусть это не так, т.е.

$$\begin{aligned} \exists \lambda_0, x_0 \mid Ax_0 &= \lambda_0 x_0, \lambda_0 > 1, \|x_0\| = R \Rightarrow \\ &\Rightarrow \|Ax_0\| = \lambda_0 \|x_0\| \end{aligned}$$

Но по условию $\|x_0\| \geq \|Ax_0\|$. Пришли к противоречию. По предыдущей теореме получаем существование неподвижной точки.

□

Теорема 5.19 (Лерэ-Шаудера). Пусть X — банахово пространство, $A : X \rightarrow X$ — вполне непрерывный оператор. Пусть для всех x таких, что $x = \lambda Ax$, $\lambda \in [0, 1]$, выполняется априорная оценка:

$$\|x\| \leq K.$$

Тогда уравнение $x = Ax$ разрешимо.

Доказательство. Зафиксируем число $R > K$.

Оператор A вполне непрерывен на $X \Rightarrow A$ вполне непрерывен на $\overline{B_R}(0)$.

Предположим, что не выполняется

$$Ax \neq \lambda x, \lambda > 1, \|x\| = R$$

т.е.

$$\exists x_0, \mu_0 \mid \|x_0\| = R, \mu_0 > 1, Ax_0 = \mu_0 x_0$$

Получаем

$$x_0 = \frac{1}{\mu_0} Ax_0, \quad \frac{1}{\mu_0} \in (0, 1)$$

Из условий теоремы получаем, что

$$\|x_0\| \leq K$$

С другой стороны

$$\|x_0\| = R > K$$

Пришли к противоречию. По теореме 5.17 получаем требуемое. $\square$

Рассмотрим уравнение $x - Ax = y$.

Теорема 5.20. Пусть X — банахово пространство, $A : X \rightarrow X$ — вполне непрерывный оператор. И пусть выполняется

$$\lim_{\|x\| \rightarrow \infty} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = q < 1$$

Тогда $\forall y \in X$ уравнение $x - Ax = y$ разрешимо.

Доказательство. Введём

$$\tilde{A}x = Ax + y$$

Это сдвиг на постоянный вектор y , следовательно, оператор $\tilde{A}$ так же является вполне непрерывным.

Имеем:

$$\|\tilde{A}x\| \leq \|Ax\| + \|y\| = (\|x\| \neq 0) = \|x\| \left(\frac{\|Ax\|}{\|x\|} + \frac{\|y\|}{\|x\|} \right)$$

Пусть $\|x\| \rightarrow R$. Тогда:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists R > 0 \mid \frac{\|Ax\|}{\|x\|} < q + \varepsilon$$

Увеличиваем R до тех пор, пока не получим:

$$\begin{aligned} \|\tilde{A}x\| &< \|x\| (q + \varepsilon + \underbrace{\varepsilon_1}_{\substack{\text{оч.} \\ \text{мало}}}) \leq 1 \cdot \|x\| \\ \Rightarrow \|\tilde{A}x\| &\leq \|x\|; \|x\| = R \end{aligned}$$

Тогда для $\tilde{A}$ справедлива теорема 5.18, следовательно, существует неподвижная точка $x_0 \mid \tilde{A}x_0 = x_0 \Rightarrow Ax_0 + y = x_0$ $\square$

6 Самосопряжённые операторы. Спектр и резольвента.

Рассматриваем пространства над $\mathbb{C}$.

Пусть $A : H \rightarrow H$, где $H = H(\mathbb{C})$.

Опр 6.1. Оператор A называется самосопряжённым, если

$$(Ax, y) = (x, Ay)$$

Лемма 6.1. Пусть H — гильбертово пространство, $A : H \rightarrow H$ — линейный, самосопряжённый оператор. Тогда

$$\|A\| = \sup_{\|x\|=1} |(Ax, x)|$$

Доказательство. С одной стороны, имеет место

$$\begin{aligned} \|Ax\| &\leq \|A\| \cdot \|x\|; \\ |(Ax, x)| &\leq \|Ax\| \cdot \|x\| \leq \|A\| \cdot \|x\|^2; \\ \Rightarrow \sup_{\|x\|=1} |(Ax, x)| &\leq \|A\| \end{aligned}$$

С другой стороны, известно, что (Ax, x) для самосопряжённого оператора A есть всегда действительное число. Пусть $y \in H$, $y \neq \theta$. Тогда

$$\begin{aligned} (Ay, y) &= \|y\|^2 \left(A \frac{y}{\|y\|}, \frac{y}{\|y\|} \right) \\ |(Ay, y)| &= \|y\|^2 \cdot \left| \left(A \frac{y}{\|y\|}, \frac{y}{\|y\|} \right) \right| \leq \|y\|^2 \sup_{\|x\|=1} |(Ax, x)| \end{aligned}$$

Получаем, что $\forall y \in H$

$$|(Ay, y)| \leq \|y\|^2 \sup_{\|x\|=1} |(Ax, x)| \quad (\star)$$

Пусть $z \in H$, $z \neq \theta$.

Определим

$$\lambda = \sqrt{\frac{\|Az\|}{\|z\|}}; \quad u = \frac{1}{\lambda} \cdot Az$$

Имеем

$$\begin{aligned}
\|Az\|^2 &= |(Az, Az)| = |(Az, \lambda u)| = |\lambda(Az, u)| = |(\lambda Az, u)| = \\
&= |(A(\lambda z), u)| = \left| \frac{1}{4} \left[(A(\lambda z + u), \lambda z + u) - (A(\lambda z - u), \lambda z - u) \right] \right| \leq \\
&\leq (\text{в силу } (\star)) \leq \frac{1}{4} \sup_{\|x\|=1} |(Ax, x)| \left[\|\lambda z + u\|^2 + \|\lambda z - u\|^2 \right] = \\
&= \frac{1}{4} \sup_{\|x\|=1} |(Ax, x)| \left[(\lambda z + u, \lambda z + u) + (\lambda z - u, \lambda z - u) \right] = \\
&= \frac{1}{2} \sup_{\|x\|=1} |(Ax, x)| \left[\lambda^2 \|z\|^2 + \|u\|^2 \right] = \\
&= \frac{1}{2} \sup_{\|x\|=1} |(Ax, x)| \left[\lambda^2 \|z\|^2 + \frac{1}{\lambda^2} \|Az\|^2 \right] = \\
&= \left(\lambda = \sqrt{\frac{\|Az\|}{\|z\|}} \right) = \frac{1}{2} \sup_{\|x\|=1} |(Ax, x)| \left[\frac{\|Az\|}{\|z\|} \|z\|^2 + \|Az\|^2 \frac{\|z\|}{\|Az\|} \right] = \\
&= \sup_{\|x\|=1} |(Ax, x)| \cdot \|z\| \cdot \|Az\|
\end{aligned}$$

Получаем

$$\|Az\|^2 \leq \|z\| \cdot \|Az\| \cdot \sup_{\|x\|=1} |(Ax, x)|;$$

Далее

$$\begin{aligned}
\|Az\| &\leq \|z\| \cdot \sup_{\|x\|=1} |(Ax, x)| = K \|z\| \\
\Rightarrow \|A\| &= \inf \{K\} \leq K = \sup_{\|x\|=1} |(Ax, x)|
\end{aligned}$$

Таким образом, получаем

$$\begin{aligned}
\|A\| &\leq \sup_{\|x\|=1} |(Ax, x)| \quad \text{и} \quad \|A\| \geq \sup_{\|x\|=1} |(Ax, x)| \\
\Rightarrow \|A\| &= \sup_{\|x\|=1} |(Ax, x)|
\end{aligned}$$

□

Следствие 6.1. Пусть $A : H \rightarrow H$ — линейный, самосопряжённый оператор. Пусть $\forall x \in H : (Ax, x) = 0$. Тогда A — нулевой оператор.

Доказательство. Очевидно. □

Опр 6.2. Пусть $L \subset H$ — подпространство, причем $\forall x \in H$ существует разложение $x = y + z$, где $y \in L$, $z \in L^\perp$.

Проектор $P : H \rightarrow L$ определяется по следующему правилу

$$Px = y$$

Утв 6.1. Свойства проекторов:

- 1) Для любого проектора P выполняется: $\|P\| = 1$
- 2) Любой проектор P является самосопряжённым оператором.

Доказательство.

$$\begin{aligned}
 (Px, u) &= (P(y+z), u) = (y, u) = \\
 &= \left(u = v + w, \text{ где } v \in L, w \in L^\perp \right) \\
 &= (y, v) + (y, w) = (y, v) \\
 (x, Pu) &= (x, P(v+w)) = (x, v) = (y+z, v) = (y, v)
 \end{aligned}$$

□

3) $\forall P: P^2 = P$

4) $0 \leq (Px, x) \leq \|x\|^2$

5) Пусть P — линейный, самосопряжённый оператор, определенный на H , $P = P^2$. Тогда P — проектор.

Указание 6.1. Для доказательства использовать факт, что

$$R(P) = N(I - P)$$

Опр 6.3. Проекторы P_1 и P_2 называются ортогональными, если P_1P_2 — нулевой оператор.

6) Пусть P_1 и P_2 — проекторы на подпространствах L_1 и L_2 соответственно. L_1 и L_2 будут ортогональны $\Leftrightarrow P_1$ и P_2 ортогональны.

Доказательство. ($\Leftarrow$) $x_1 \in L_1; x_2 \in L_2$

Рассмотрим

$$(x_1, x_2) = (P_1x_1, P_2x_2) = (x_1, P_1P_2x_2) = 0$$

($\Rightarrow$) Пусть $L_1 \perp L_2$, и пусть $x \in H$, тогда

$$\begin{aligned}
 P_1x \in L_1; P_2x \in L_2 &\Rightarrow (P_1x, P_2x) = 0 \Rightarrow \\
 &\Rightarrow \forall x \in H: (x, P_1P_2x) = 0
 \end{aligned}$$

По следствию 6.1 P_1P_2 — нулевой оператор.

□

(Лекция №12, 22.11.2010)

Пусть P_1 и P_2 — проекторы, тогда справедливы следующие утверждения:

Утв 6.2. $P_1 - P_2$ — проектор $\Leftrightarrow P_1P_2 = P_2$

Утв 6.3. $P_1 + P_2$ — проектор $\Leftrightarrow P_1 \perp P_2$

Утв 6.4. P_1P_2 — проектор $\Leftrightarrow P_1P_2 = P_2P_1$

Опр 6.4. Самосопряжённый оператор $A: H \rightarrow H$ называется положительным, если $\forall x \in H: (Ax, x) \geq 0$ и при этом $\exists x_0 \mid (Ax_0, x_0) > 0$.

Обозначение: $A > 0$ — положительный оператор.

Опр 6.5. Самосопряжённый оператор $A: H \rightarrow H$ называется неотрицательным, если $\forall x \in H: (Ax, x) \geq 0$.

Обозначение: $A \geq 0$ — неотрицательный оператор.

Опр 6.6. $A \geq B \Leftrightarrow A - B \geq 0$

Свойства:

1) $A \geq B, B \geq C \Rightarrow A \geq C$

2) $A \geq B, C \geq D \Rightarrow A + C \geq B + D$

3) $A \geq 0$ и $\exists A^{-1} \Rightarrow A^{-1} \geq 0$

4) Пусть $A : H \rightarrow H$ — произвольный линейный оператор. Тогда $AA^* \geq 0$ и $A^*A \geq 0$.

Теорема 6.1. Пусть H — гильбертово пространство; $A : H \rightarrow H$, $B : H \rightarrow H$, $A \geq 0$, $B \geq 0$, и пусть A, B — самосопряжённые и коммутативные ($AB = BA$) операторы. Тогда $AB \geq 0$

Доказательство. Рассмотрим

$$A_1 = \frac{A}{\|A\|}; \quad A_2 = A_1 - A_1^2; \quad A_3 = A_2 - A_2^2; \quad \dots$$

Покажем, что $\forall n$ выполняется:

$$0 \leq A_n \leq I$$

Докажем методом математической индукции.

База индукции: $n = 1$

$$0 \leq A_1; \text{ — очевидно}$$

$$\begin{aligned} \left(x - \frac{Ax}{\|A\|}, x \right) &= (x, x) - \frac{1}{\|A\|} (Ax, x) = \|x\|^2 - \frac{(Ax, x)}{\sup_{\|x\|=1} |(Ax, x)|} = \\ &= \|x\|^2 - \frac{\|x\|^2 \left(A \frac{x}{\|x\|}, \frac{x}{\|x\|} \right)}{\sup_{\|x\|=1} |(Ax, x)|} = \|x\|^2 \left(1 - \frac{\left(A \frac{x}{\|x\|}, \frac{x}{\|x\|} \right)}{\sup_{\|x\|=1} |(Ax, x)|} \right) \geq 0; \Rightarrow \\ &\Rightarrow I - A_1 \geq 0 \end{aligned}$$

Предположим, что для $n = m$ верно

$$0 \leq A_m \leq I$$

Докажем для $n = m + 1$. Рассмотрим

$$\begin{aligned} (A_m^2(I - A_m)x, x) &= (A_m(I - A_m)x, A_mx) = ((I - A_m)A_mx, A_mx) = \\ &= ((I - A_m)y, y) \geq 0 \end{aligned}$$

Следовательно

$$A_m^2(I - A_m) \geq 0$$

Аналогично

$$A_m(I - A_m)^2 \geq 0$$

Покажем, что

$$A_{m+1} = A_m^2(I - A_m) + A_m(I - A_m)^2$$

Очевидно, что операторы I и A_m коммутативны. Раскроем скобки:

$$A_m^2(I - A_m) + A_m(I - 2A_m + A_m^2) = A_m - A_m^2 = A_{m+1}$$

Отсюда получаем, что $A_{m+1} \geq 0$.

Имеет место

$$I - A_{m+1} = \underbrace{I - A_m}_{\geq 0} + \underbrace{A_m^2}_{\geq 0} \geq 0 \Rightarrow I \geq A_{m+1}$$

В итоге получаем

$$0 \leq A_{m+1} \leq I$$

Имеем:

$$A_1 = A_1^2 + A_2 = A_1^2 + A_2^2 + A_3 = \dots = \sum_{i=1}^n A_i^2 + A_{n+1}$$

Таким образом

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n A_k^2 &= A_1 - A_{n+1} \leq A_1 \quad (\star) \\ \sum_{k=1}^n (A_k x, A_k x) &\leq (A_1 x, x) \\ \sum_{k=1}^n \|A_k x\|^2 &\leq (A_1 x, x) - \text{число} \\ \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \|A_k x\|^2 &< +\infty \quad \text{т.е. сходится} \\ &\Rightarrow A_k x \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0 \\ \text{из } (\star) \Rightarrow \left(\sum_{k=1}^n A_k^2 \right) x &= A_1 x - A_{n+1} x \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} A_1 x \end{aligned}$$

В силу свойства $AB = BA$, оператор B коммутирует с $A_k \forall k$. Рассмотрим

$$\begin{aligned} (ABx, x) &= \|A\| (BA_1 x, x) = \|A\| \left(B \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n A_k^2 \right) x, x \right) = \\ &= ((\cdot, \cdot) - \text{непр. ф-ция}) = \|A\| \lim_{n \rightarrow \infty} \left(B \sum_{k=1}^n A_k^2 x, x \right) = \\ &= \|A\| \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^n BA_k^2 x, x \right) = \|A\| \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^n A_k BA_k x, x \right) = \\ &= \|A\| \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n (A_k BA_k x, x) = (A_k - \text{самосопр.}) = \\ &= \|A\| \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n (BA_k x, A_k x) = (y = A_k x) = \|A\| \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n (By, y) \geq 0 \end{aligned}$$

□

Лемма 6.2. Пусть $\{A_n\}$ — последовательность самосопряжённых, попарно перестановочных операторов $| A_n \leq A_{n+1}$. Если $\{A_n\}$ ограничена сверху некоторым самосопряжённым оператором B , перестановочным с каждым A_n , то последовательность $\{A_n\}$ имеет предел A , причём $A \leq B$.

Доказательство. Определим

$$C_n = B - A_n \geq 0$$

Очевидно, что C_n — самосопряжённый и неотрицательный оператор, а последовательность $\{C_n\}$ монотонно убывает.

Пусть $m, n \in \mathbb{N} \mid m < n$. Рассмотрим

$$\underbrace{(C_m - C_n)}_{\geq 0} \underbrace{C_m}_{\geq 0} \text{ и } \underbrace{C_n}_{\geq 0} \underbrace{(C_m - C_n)}_{\geq 0}$$

Следовательно, по теореме 6.1

$$(C_m - C_n)C_m \geq 0 \text{ и } C_n(C_m - C_n) \geq 0$$

Имеем

$$(C_m^2 x, x) \geq (C_n C_m x, x) \geq (C_n^2 x, x)$$

Т.е. получаем, что $\{(C_n^2 x, x)\}$ — монотонно убывающая числовая последовательность, ограниченная снизу $\Rightarrow$ существует предел. По лемме о зажатой последовательности, он является пределом $\{(C_n C_m x, x)\}$.

Рассмотрим

$$\begin{aligned} \|C_m x - C_n x\|^2 &= ((C_m - C_n)x, (C_m - C_n)x) = \\ &= ((C_m - C_n)^2 x, x) = ((C_m^2 - 2C_m C_n + C_n^2)x, x) = \\ &= (C_m^2 x, x) - 2(C_m C_n x, x) + (C_n^2 x, x) \xrightarrow{n, m \rightarrow \infty} 0 \end{aligned}$$

Следовательно, последовательность $\{C_n x\}$ фундаментальна и, тем самым, имеет предел $\Rightarrow \{A_n x\}$ имеет предел. Обозначим

$$Ax = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n x$$

Имеем:

$$\begin{aligned} (Ax, y) &= (\lim_{n \rightarrow \infty} A_n x, y) = ((\cdot, \cdot) \text{ — непрерывная функция}) = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} (A_n x, y) = \lim_{n \rightarrow \infty} (x, A_n y) = (x, \lim_{n \rightarrow \infty} A_n y) = (x, Ay) \end{aligned}$$

Рассмотрим:

$$\begin{aligned} (Bx, x) - (Ax, x) &= ((B - A)x, x) = \\ &= ((B - \lim_{n \rightarrow \infty} A_n)x, x) = \lim_{n \rightarrow \infty} ((B - A_n)x, x) \geq 0 \end{aligned}$$

□

Теорема 6.2 (О существовании квадратного корня). Пусть A — самосопряжённый неотрицательный оператор, тогда существует неотрицательный самосопряжённый оператор $B \mid B^2 = A$.

Замечание 6.1. Оператор B — единственный в классе операторов, перестановочных с любым оператором, перестановочным с A .

Доказательство. Определим

$$B_0 = 0$$
$$B_{n+1} = B_n + \frac{1}{2}(A - B_n^2)$$

Считаем, что $0 \leq A \leq I$

Упр 6.1. Методом математической индукции доказать, что B_n перестановочен с A , $B_n = B_n^*$, $B_n \leq I$ и для фиксированного n выполняется $B_n B_m = B_m B_n$.

Имеет место тождество:

$$I - B_{n+1} = \frac{1}{2}(I - B_n)^2 + \frac{1}{2}(I - A)$$

Проверим

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(I - B_n)^2 + \frac{1}{2}(I - A) &= \frac{1}{2}I - B_n + \frac{1}{2}B_n^2 + \frac{1}{2}I - \frac{1}{2}A = \\ &= I - B_n - \frac{1}{2}(A - B_n^2) = I - B_{n+1} \end{aligned}$$

Ещё одно тождество:

$$B_{n+1} - B_n = \frac{1}{2}[(I - B_{n-1}) + (I - B_n)](B_n - B_{n-1}) \quad (*)$$

Упр 6.2. Проверить (*).

Из (*) $\Rightarrow B_{n+1} - B_n \geq 0 \Rightarrow \{B_n\}$ монотонно возрастает. По лемме 6.2 из ограниченности и монотонности $\{B_n\}$ следует, что существует предел:

$$B = \lim_{n \rightarrow \infty} B_n$$

Рассмотрим выражение:

$$B_{n+1} = B_n + \frac{1}{2}(A - B_n^2)$$

Перейдя к пределу при $n \rightarrow \infty$ получим

$$B = B + \frac{1}{2}(A - B^2)$$

Отсюда $A = B^2$.

□

6.1 Элементы спектральной теории

Опр 6.7. Пусть задан оператор $A: X \rightarrow X$, где $X = X(\mathbb{C})$. Собственным элементом оператора A называется такой $x \neq \theta$, что для некоторого $\lambda \in \mathbb{C}$ выполняется $Ax = \lambda x$. Число λ называется собственным числом оператора A .

Утв 6.5. Собственные элементы, отвечающие различным собственным числам, образуют линейно независимую систему.

Утв 6.6. Пусть A — линейный оператор. Тогда замыкание линейной оболочки собственных векторов является подпространством.

Теорема 6.3. Всякое собственное подпространство L линейного, вполне непрерывного оператора A , соответствующее собственному числу $\lambda \neq 0$ — конечномерно.

Доказательство. Пусть $\overline{B_R}(0)$ — замкнутый шар в L , радиуса $R > 0$. Возьмём $\{x_n\} \subset \overline{B_R}(0)$.

Оператор A вполне непрерывен, следовательно, из $\{A \frac{x_n}{R}\}$ можно извлечь сходящуюся подпоследовательность y_{n_k} , где $y_{n_k} = \frac{1}{R} A x_{n_k}$. Имеем

$$x_{n_k} = \frac{1}{\lambda} A x_{n_k} = \frac{R}{\lambda} \left(\frac{1}{R} A x_{n_k} \right) \Rightarrow x_{n_k} \text{ сходится}$$

Таким образом, $\overline{B_R}(0)$ в L относительно компактен, т.е. L локально относительно компактно в X . По теореме 4.5 L — конечномерно. $\square$

(Лекция №13, 29.11.2010)

Теорема 6.4. Пусть X — банахово, $A \in \sigma(X)$. Тогда $\forall R > 0$ вне круга $|\lambda| \leq R$ может содержаться лишь конечное число собственных чисел оператора A .

Следствие 6.2. Либо множество $\{\lambda\}$ конечно, либо существует единственная предельная точка, равная нулю.

Доказательство. Докажем от противного. Пусть $\exists R_0 > 0$ такой, что вне круга $\{\lambda \mid |\lambda| \leq R_0\}$ лежит бесконечно много собственных чисел $\{\lambda_n\}$ таких, что $\forall i \neq j : \lambda_i \neq \lambda_j$.

Выберем для каждого λ_n по одному собственному элементу x_n . Получим множество $\{x_n\}$. Определим

$$X_n = \overline{\{x_1, \dots, x_n\}}$$

Имеем:

$$X_n \subset X_{n+1}$$

По лемме 4.1 Рисса о почти перпендикуляре получаем

$$\exists y_n \in X_n \mid \|y_n\| = 1, \|y_n - x\| \geq \frac{1}{2} \quad \forall x \in X_{n-1} \quad (*)$$

Получили последовательность $\{y_n\}$. Рассмотрим последовательность $\{A y_n\}$. Поскольку $A \in \sigma(X)$, то существует сходящаяся подпоследовательность. Пусть $m > n$, тогда

$$\begin{aligned} \|A y_m - A y_n\| &= \|(A - \lambda_m) y_m + \lambda_m y_m - (A - \lambda_n) y_n - \lambda_n y_n\| = \\ &= |\lambda_m| \cdot \left\| y_m + \frac{1}{\lambda_m} (A - \lambda_m) y_m - \frac{1}{\lambda_m} (A - \lambda_n) y_n - \frac{\lambda_n}{\lambda_m} y_n \right\| = \\ &= |\lambda_m| \cdot \left\| y_m - \underbrace{\left[-\frac{1}{\lambda_m} (A - \lambda_m) y_m + \frac{1}{\lambda_m} (A - \lambda_n) y_n + \frac{\lambda_n}{\lambda_m} y_n \right]}_{\text{обозначим} = x_{nm}} \right\| = \\ &= |\lambda_m| \cdot \|y_m - x_{nm}\| \end{aligned}$$

Т.к. $y_m \in X_m$, $y_n \in X_n$, то мы можем разложить по базису:

$$y_m = \sum_{i=1}^m \alpha_{im} x_i$$

$$y_n = \sum_{i=1}^n \tilde{\alpha}_{in} x_i$$

Тогда

$$(A - \lambda_m)y_m = Ay_m - \lambda_m y_m = \sum_{i=1}^m \alpha_{im} Ax_i - \lambda_m \sum_{i=1}^m \alpha_{im} x_i =$$

$$= \sum_{i=1}^{m-1} \alpha_{im} (\lambda_i - \lambda_m) x_i$$

Аналогично

$$(A - \lambda_n)y_n = \sum_{i=1}^{n-1} \tilde{\alpha}_{in} (\lambda_i - \lambda_n) x_i$$

Отсюда видно, что

$$(A - \lambda_m)y_m \in X_{m-1}$$

$$(A - \lambda_n)y_n \in X_{n-1}$$

В итоге получаем:

$$x_{nm} \in X_{m-1}, \text{ т.к. } m > n$$

Отсюда

$$\|Ay_m - Ay_n\| \geq \frac{R_0}{2} \text{ (в силу } (*) \text{ и т.к. } |\lambda| > R_0)$$

Получаем, что у $\{Ay_n\}$ не существует фундаментальной подпоследовательности, пришли к противоречию с тем, что $A \in \sigma(X) \Rightarrow$ не существует такого R_0 .

□

Теорема 6.5. Пусть H — гильбертово. $A : H \rightarrow H$ — вполне непрерывный, ненулевой оператор. Тогда у оператора A есть хотя бы одно собственное число $\neq 0$.

Доказательство. По лемме 6.1:

$$\|A\| = \sup_{\|x\|=1} |(Ax, x)|$$

Следовательно, $\exists \{x_n\} \mid \|x_n\| = 1 \forall n$, и, либо $(Ax_n, x_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \|A\|$, либо $(Ax_n, x_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} -\|A\|$. Без ограничения общности будем считать, что имеет место первая сходимость (иначе перейдем к оператору $B = -A$).

Покажем, что число $\|A\|$ — собственное число оператора A . Поскольку A вполне непрерывен, то

$$\exists \{n_m\} \mid \{Ax_{n_m}\} \text{ — сходится, и по-прежнему:}$$

$$(Ax_{n_m}, x_{n_m}) \xrightarrow{m \rightarrow \infty} \|A\|.$$

Рассмотрим

$$\begin{aligned}
\|Ax_{n_m} - \|A\|x_{n_m}\|^2 &= (Ax_{n_m} - \|A\|x_{n_m}, Ax_{n_m} - \|A\|x_{n_m}) = \\
&= \|Ax_{n_m}\|^2 - 2(Ax_{n_m}, \|A\|x_{n_m}) + \|A\|^2 \cdot 1 = \\
&= \|Ax_{n_m}\|^2 - 2\|A\|(Ax_{n_m}, x_{n_m}) + \|A\|^2 \leq \\
&\leq \|A\|^2 \cdot \underbrace{\|x_{n_m}\|^2}_1 - 2\|A\|(Ax_{n_m}, x_{n_m}) + \|A\|^2 \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 2\|A\|^2 - 2\|A\|^2 = 0
\end{aligned}$$

Имеет место тождество

$$x_{n_m} = \frac{1}{\|A\|}Ax_{n_m} - \frac{1}{\|A\|}(Ax_{n_m} - \|A\|x_{n_m}) \quad (\star)$$

В силу тождества $(\star)$ из сходимости $\{Ax_{n_m}\}$ получаем сходимость $\{x_{n_m}\}$ (x_{n_m} — элементы сферы, значит предел $\neq 0$). Имеем

$$x_{n_m} \xrightarrow{m \rightarrow \infty} x_0 \neq 0; \quad Ax_{n_m} \xrightarrow{m \rightarrow \infty} Ax_0$$

Тогда

$$Ax_{n_m} - \|A\|x_{n_m} \xrightarrow{m \rightarrow \infty} (Ax_0 - \|A\|x_0)$$

Следовательно, т.к. $(Ax_{n_m} - \|A\|x_{n_m}) \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0$, то получаем

$$Ax_0 = \|A\|x_0$$

□

Теорема 6.6. Пусть $H = H(\mathbb{R})$ — гильбертово пространство. Оператор $A \in \sigma(H)$, $A = A^*$. Определим:

$$m = \inf_{\|x\|=1} (Ax, x)$$

$$M = \sup_{\|x\|=1} (Ax, x)$$

Тогда все собственные числа оператора A лежат на отрезке $[m, M]$, и при этом, если $M \neq 0$, то M — наибольшее собственное число оператора A . Если $m \neq 0$, то m — наименьшее собственное число оператора A .

Замечание 6.2. Используется тот факт, что собственные числа самосопряженного оператора действительны.

Доказательство. Пусть λ — собственное число оператора A , тогда

$$\begin{aligned}
Ax &= \lambda x, \quad x \neq 0 \\
(Ax, x) &= \lambda(x, x) = \lambda\|x\|^2
\end{aligned}$$

Определим

$$y = \frac{x}{\|x\|}$$

Тогда

$$(Ay, y) = \lambda$$

Следовательно, $m \leq \lambda \leq M$

Рассмотрим

$$B = MI - A$$

Очевидно, что $B \geq 0$. Введем операцию $[\cdot, \cdot]$:

$$[x, y] = (Bx, y)$$

Заметим, что для $[\cdot, \cdot]$ выполняются все аксиомы скалярного произведения. Неравенство Коши-Буняковского в таком случае примет вид:

$$(Bx, y)^2 \leq (Bx, x) \cdot (By, y)$$

Поскольку $M = \sup_{\|x\|=1} (Ax, x)$, то по определению точной верхней грани $\exists \{x_n\} \mid \|x_n\| = 1 \forall n$ и $(Ax_n, x_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} M$. Положим

$$x = x_n; y = Bx_n$$

Получим:

$$\begin{aligned} [x, y]^2 &= (Bx, y)^2 = (Bx_n, Bx_n)^2 \leq (\text{нер-во Коши-Бун.}) \leq \\ &\leq (Bx_n, x_n) \cdot (B^2 x_n, Bx_n) \leq \underbrace{(M - (Ax_n, x_n))}_{\rightarrow 0} \cdot \underbrace{\|B\|^3}_{\text{число}} \\ \Rightarrow \|Bx_n\|^4 &\xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \Rightarrow (MI - A)x_n = Mx_n - Ax_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \\ A \in \sigma(H) &\Rightarrow \exists \{n_m\} \mid \{Ax_{n_m}\} \text{ сходится} \end{aligned}$$

Аналогично предыдущей теореме получаем, что $\{x_{n_m}\}$ сходится:

$$x_{n_m} \xrightarrow{m \rightarrow \infty} x_0; \quad Ax_{n_m} \xrightarrow{m \rightarrow \infty} Ax_0$$

Получаем, что

$$(Mx_n - Ax_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} (Mx_0 - Ax_0) \quad \text{и} \quad (Mx_n - Ax_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Отсюда $Ax_0 = Mx_0$. Аналогично можно получить $Ax_0 = mx_0$. В силу того, что для любого λ выполняется $m \leq \lambda \leq M$, то получаем, что M — наибольшее собственное число, а m — наименьшее. □

Следствие 6.3. Пусть $A \in \sigma(H)$, тогда

$$\|A\| = |\lambda_1|, \quad \text{где } \lambda_1 = \max\{|\lambda| \mid Ax = \lambda x\}$$

Доказательство. Очевидно в силу теорем 6.5 и 6.6. □

Теорема 6.7 (Гильберта-Шмидта). Пусть $H = H(\mathbb{R})$ — гильбертово пространство, и пусть $A \in \sigma(H)$, $A = A^*$. Тогда $\forall x \in H$:

$$Ax = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k x_k, \quad \text{где}$$

$\{x_1, \dots, x_k, \dots\}$ — ортонормированная система собственных элементов оператора A .

Замечание 6.3. Существование ортонормированной системы $\{x_k\}$ очевидно.

Доказательство. В силу теоремы 6.4 существует наибольшее по модулю собственное число λ_1

$$A\varphi_1 = \lambda_1\varphi_1; \quad \|\varphi_1\| = 1$$

Определим

$$H_1 = \{x \in H \mid (x, \varphi_1) = 0\}$$

Пусть $x \in H_1$, тогда

$$\begin{aligned} (Ax, \varphi_1) &= (x, A\varphi_1) = (x, \lambda_1\varphi_1) = \lambda_1(x, \varphi_1) = 0 \\ &\Rightarrow A : H_1 \rightarrow H_1; \end{aligned}$$

H_1 — подпространство H (линейность в силу $H = H(\mathbb{R})$, замкнутость из непрерывности скалярного произведения)

$$A \in \sigma(H_1), \text{ т.к. } A \in \sigma(H)$$

По теореме 6.5 оператор A в H_1 имеет хотя бы одно ненулевое собственное число. Выберем среди этих чисел одно с наибольшим модулем. Обозначим его через λ_2 . Получаем

$$\begin{aligned} \varphi_2 \in H_1 \mid A\varphi_2 &= \lambda_2\varphi_2 \\ \|\varphi_2\| &= 1 \text{ (можно отнормировать), } (\varphi_1, \varphi_2) = 0 \end{aligned}$$

Определим

$$H_2 = \{x \in H_1 \mid (x, \varphi_2) = 0\}$$

По аналогии получаем $\{\varphi_k\}$ и $\{\lambda_k\}$.

Возможны два случая:

1) Цепочка прервется, т.е. $H_n = \{\theta\}$. Таким образом, оператор A на H_n — нулевой. Определим

$$y = x - \sum_{k=1}^n (x, \varphi_k) \varphi_k$$

Заметим, что

$$(y, \varphi_j) = 0 \quad \forall j = 1, \dots, n.$$

Т.е. получаем, что $y \in H_n$, где

$$H_n = \{x \mid (x, \varphi_j) = 0 \quad \forall j = 1, \dots, n\}$$

Поскольку A на H_n — нулевой оператор, то

$$Ay = 0 \Rightarrow Ax = \sum_{k=1}^n \lambda_k (x, \varphi_k) \varphi_k$$

2) Цепочка бесконечная.

По следствию 6.3

$$\|A\|_{\mathcal{L}(H_n)}^2 = \lambda_{n+1}^2$$

Рассмотрим

$$\begin{aligned}
\|Ay_n\|^2 &= \left(Ax - A \sum_{k=1}^n (x, \varphi_k) \varphi_k, Ax - A \sum_{k=1}^n (x, \varphi_k) \varphi_k \right) \leq \\
&\leq \lambda_{n+1}^2 \left\| x - \sum_{k=1}^n (x, \varphi_k) \varphi_k \right\|^2 = \\
&= \lambda_{n+1}^2 \left(x - \sum_{k=1}^n (x, \varphi_k) \varphi_k, x - \sum_{k=1}^n (x, \varphi_k) \varphi_k \right) = \\
&= \lambda_{n+1}^2 \left(\|x\|^2 - 2 \sum_{i=1}^n (x, \varphi_k)^2 + \sum_{i=1}^n (x, \varphi_k)^2 \right) = \\
&= \lambda_{n+1}^2 (\|x\|^2 - \sum_{i=1}^n (x, \varphi_k)^2) \leq \\
&\quad (\text{Неравенство Бесселя: } \sum_{k=1}^{\infty} (x, \varphi_k)^2 \leq \|x\|^2) \\
&\leq \lambda_{n+1}^2 \|x\|^2
\end{aligned}$$

Так как по следствию 6.2 $\lambda_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, то

$$\|Ay_n\|^2 = \|Ax - \sum_{k=1}^n (x, \varphi_k) A\varphi_k\|^2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \Rightarrow Ax = \sum_{k=1}^{\infty} (x, \varphi_k) A\varphi_k$$

□

(Лекция №14, 13.12.2010)

Следствие 6.4. Пусть $A \in \sigma(H)$, $A = A^*$, A — непрерывно обратим. Тогда из его собственных функций можно составить ортобазис пространства H .

$$Ax = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n (x, \varphi_k) A\varphi_k$$

Следствие 6.5. Пусть $A \in \sigma(H)$, $A = A^*$, H — сепарабельно. Тогда в H существует ортонормированный базис из собственных функций.

Доказательство. Если $N(A) = \{0\}$, то получаем, что выполняются условия следствия 6.4.

Пусть $N(A) \neq \{0\}$. Рассмотрим

$$z = x - \sum_{k=1}^{\infty} (x, \varphi_k) \varphi_k \in N(A)$$

Известно, что в любом сепарабельном гильбертовом пространстве существует ортонормированный базис. Обозначим его $\{e_n\}$

$$z = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k e_k \Rightarrow x = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k e_k + \sum_{k=1}^{\infty} (x, \varphi_k) \varphi_k$$

□

Опр 6.8. Число λ называется регулярным числом (значением) оператора A , если

$$\exists (A - \lambda I)^{-1} \in \mathcal{L}(X)$$

Опр 6.9. Совокупность всех регулярных чисел оператора A называется резольвентным множеством и обозначается $\rho(A)$

Резольвента: $R_\lambda(A) = (A - \lambda I)^{-1}$

Спектр: $\sigma(A) = \mathbb{C} \setminus \rho(A)$

Теорема 6.8. Пусть X — банахово пространство, $A \in \mathcal{L}(X)$. Тогда резольвентное множество $\rho(A)$ открыто.

Доказательство. Пусть $\lambda_0 \in \rho(A)$, тогда

$$A - \lambda I = \underbrace{A - \lambda_0 I}_{\text{обратим}} + (\lambda_0 - \lambda)I = (A - \lambda_0 I)(I + (\lambda_0 - \lambda)(A - \lambda_0 I)^{-1})$$

Если $\|(\lambda_0 - \lambda)(A - \lambda_0 I)^{-1}\| < 1$, то оператор $A - \lambda I$ обратим. Данное неравенство выполняется в тех случаях, когда $(\lambda_0 - \lambda)$ — малая величина:

$$|\lambda_0 - \lambda| < \varepsilon$$

Таким образом, для λ_0 существует малая окрестность, где сохраняется обратимость, следовательно $\rho(A)$ открыто. $\square$

Теорема 6.9. Пусть X — банахово, $A \in \mathcal{L}(X)$. Тогда

$$\{\lambda \mid |\lambda| > \|A\|\} \subset \rho(A)$$

Доказательство. Пусть $\lambda \in \{\lambda \mid |\lambda| > \|A\|\}$

Оператор $A - \lambda I$ можно представить в виде

$$A - \lambda I = -\lambda \left[I - \frac{1}{\lambda} A \right]$$

$$\|A\| < |\lambda| \Rightarrow \left\| \frac{1}{\lambda} A \right\| < 1 \Rightarrow \text{По теореме 2.2 } \exists \left(I - \frac{1}{\lambda} A \right)^{-1}$$

$\square$

Все возможные случаи:

1. $(A - \lambda I)^{-1}$ не существует.
2. $A - \lambda I$ обратим, но $R(A - \lambda I) \neq X$, т.е. $(A - \lambda I)$ обратим на подпространстве.
3. $(A - \lambda I)^{-1}$ существует, но неограничен.

Опр 6.10. Спектральным радиусом называется величина

$$r(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \|A^n\|^{\frac{1}{n}}$$

Теорема 6.10. Пусть X — банахово, $A \in \mathcal{L}(X)$, тогда $r(A)$ существует и конечен.

Доказательство. Рассмотрим

$$r_1(A) = \inf_{n \in \mathbb{N}} \left\{ \|A^n\|^{\frac{1}{n}} \right\}$$

Точная нижняя грань всегда существует, т.к. $\|A^n\|^{\frac{1}{n}}$ ограничен снизу нулём. По определению точной нижней грани получаем

$$\forall \varepsilon > 0 \exists m \in \mathbb{N} \mid \|A^m\|^{\frac{1}{m}} \leq r_1 + \varepsilon$$

Пусть $p_n, q_n \in \mathbb{Z}_+ \mid n = p_n m + q_n$. Рассмотрим

$$\begin{aligned} \|A^n\|^{\frac{1}{n}} &= \|A^{p_n m + q_n}\|^{\frac{1}{n}} \leq \|A^m\|^{\frac{p_n}{n}} \cdot \|A\|^{\frac{q_n}{n}} \leq \\ &\leq (r_1 + \varepsilon)^{\frac{p_n m}{n}} \cdot \|A\|^{\frac{q_n}{n}} = (r_1 + \varepsilon)(r_1 + \varepsilon)^{-\frac{q_n}{n}} \|A\|^{\frac{q_n}{n}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} (r_1 + \varepsilon) \end{aligned}$$

В силу свойств предела можно считать, что при достаточно больших n

$$r_1 \leq \|A^n\|^{\frac{1}{n}} \leq r_1 + 2\varepsilon$$

По теореме о зажатой последовательности и в силу произвольности выбора ε

$$\|A^n\|^{\frac{1}{n}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} r_1$$

□

Следствие 6.6. $r(A) \leq \|A\|$

Доказательство.

$$\|A^n\| \leq \|A\|^n \Rightarrow \sqrt[n]{\|A^n\|} \leq \|A\|$$

Отсюда

$$r(A) \leq \|A^n\|^{\frac{1}{n}} \leq \|A\|$$

□

Теорема 6.11. Пусть X — банахово пространство, $A \in \mathcal{L}(X)$, $r(A) < 1$. Тогда оператор $(I - A)$ непрерывно обратим.

Доказательство. Рассмотрим числовой ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|A^k\|$$

Если $r(A) < 1$, то ряд сходится по критерию Коши. Рассмотрим операторный ряд:

$$S = \sum_{k=0}^{\infty} A^k$$

Несложно показать, что последовательность $\{S_n = \sum_{k=0}^n A^k\}$ — фундаментальна.

Аналогично доказательству теоремы 2.2, можно показать, что S — правый и левый обратный к $(I - A)$.

□

Следствие 6.7. Если для некоторого натурального m выполняется

$$\|A^m\| < 1,$$

то оператор $(I - A)$ непрерывно обратим.

Доказательство. $\|A^m\| < 1 \Rightarrow r(A) < 1 \Rightarrow$ справедливы условия теоремы 6.11. $\square$

Теорема 6.12. Пусть X — банахово пространство, $A \in \mathcal{L}(X)$, и задано число $\lambda \mid \lambda > r(A)$. Тогда $\lambda \in \rho(A)$

Доказательство. Рассмотрим

$$S(\lambda) = - \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^{-(k+1)} A^k$$

Имеем

$$\|\lambda^{-(k+1)} A^k\|^{\frac{1}{k}} = (|\lambda|^{-1} \|\lambda^{-k} A^k\|)^{\frac{1}{k}} = |\lambda|^{-\frac{1}{k}} |\lambda|^{-1} \|A^k\|^{\frac{1}{k}} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \frac{r(A)}{|\lambda|} < 1$$

По признаку Коши числовой ряд с такими слагаемыми сходится. Следовательно, исходный ряд тоже сходится.

Введём

$$S_n(\lambda) = - \sum_{k=0}^n \lambda^{-(k+1)} A^k$$

Рассмотрим

$$\begin{aligned} S_n(\lambda)(A - \lambda I) &= I - \lambda^{-(n+1)} A^{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} I \\ S_n(\lambda)(A - \lambda I) &\xrightarrow{n \rightarrow \infty} S(\lambda)(A - \lambda I) \end{aligned}$$

Аналогично для $(A - \lambda I)S_n(\lambda)$. Отсюда, $(A - \lambda I)$ непрерывно обратим, значит $\lambda \in \rho(A)$. $\square$

Замечание 6.4. Резольвента $S(\lambda) = - \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^{-(k+1)} A^k$ аналитична в ∞ .

Теорема 6.13 (Лиувилля). Если функция f является аналитической на всей комплексной плоскости и ограничена, т.е. $|f(z)| \leq M < +\infty$ для $\forall z \in \mathbb{C}$, то $f \equiv \text{const}$.

Теорема 6.14. Пусть X — банахово пространство, оператор $A \in \mathcal{L}(X)$. Тогда $\sigma(A) \neq \emptyset$.

Доказательство. От противного. Пусть $\sigma(A) = \emptyset$.

Докажем, что $R_\lambda(A)$ аналитична всюду. Пусть $\lambda_0 \in \rho(A)$ — фиксировано, $\lambda \in \rho(A)$ — произвольно. Имеем:

$$R_\lambda(A) = [I - (\lambda - \lambda_0)R_{\lambda_0}(A)]^{-1} R_{\lambda_0}(A) = \sum_{k=0}^{\infty} (\lambda - \lambda_0)^k R_{\lambda_0}^{k+1}(A)$$

Получили представление $R_\lambda(A)$ в виде сходящегося ряда, значит, $R_\lambda(A)$ аналитична на всём $\rho(A)$.

Рассмотрим числовую функцию

$$\varphi(\lambda) = f(R_\lambda(A)x), \text{ где } f \in X^* \text{ — произвольный, } x \in X.$$

Имеем

$$\begin{aligned} & \|f(R_\lambda(A)x) + f\left(\sum_{k=0}^n \lambda^{-(k+1)} A^k x\right)\| \leq \\ & \leq \|f\| \cdot \|R_\lambda(A)x + \sum_{k=0}^n \lambda^{-(k+1)} A^k x\| \leq \\ & \leq \underbrace{\|f\| \cdot \|x\|}_{\text{фикс.}} \cdot \underbrace{\|R_\lambda(A) + \sum_{k=0}^n \lambda^{-(k+1)} A^k\|}_{\rightarrow 0} \end{aligned}$$

Таким образом

$$\varphi(\lambda) = - \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^{-(k+1)} A^k f(x)$$

Это означает, что $\varphi(\lambda)$ аналитична по λ в окрестности ∞ . Аналогичным образом получим, что $\varphi(\lambda)$ аналитична в окрестности любой точки из $\rho(A)$, а значит, и на всей $\mathbb{C}$.

Функция $\varphi(\lambda)$ ограничена на ∞ (и на любом круге с центром в начале координат) в силу представления в виде ряда.

Таким образом, $\varphi(\lambda)$ ограничена и аналитична всюду. По теореме Лиувилля: $\varphi(\lambda) = \text{const}$. Имеем

$$\begin{aligned} \varphi(\infty) = 0 & \Rightarrow \varphi = 0 = f(R_\lambda(A)x) \quad \forall x \in X, \forall f \in X^* \Rightarrow \\ & \Rightarrow R_\lambda(A) = 0 \Rightarrow A \equiv 0 \end{aligned}$$

Пришли к противоречию, т.к. $A \neq 0$.

□

(Лекция №15, 20.12.2010)

7 Топологические пространства и пространства сходимости.

Опр 7.1. Топологическим пространством называется множество X , в котором задано семейство подмножеств τ , обладающее следующими свойствами:

1. $X \in \tau$, $\emptyset \in \tau$;
2. Объединение любого и пересечение конечного числа элементов из τ принадлежит τ .

Обозначение: (X, τ) — топологическое пространство.

Опр 7.2. Множества, принадлежащие τ , называются открытыми.

Пример 7.1. Любое метрическое пространство (Стандартная метрическая топология).

Пример 7.2. τ — все подмножества X .

Пример 7.3. $\tau = \{X, \emptyset\}$ (Тривиальная топология).

Опр 7.3. Пусть заданы две топологии τ_1 и τ_2 . Говорят, что топология τ_1 является более слабой, чем топология τ_2 ($\tau_1 \prec \tau_2$), если любое множество семейства τ_1 принадлежит множеству τ_2 .

Опр 7.4. Окрестностью элемента $x \in X$ называется любое открытое множество, содержащее x .

Опр 7.5. Топологическое пространство (X, τ) называется Хаусдорфовым, если у двух различных элементов из X существует две непересекающиеся окрестности.

Пример 7.4. Евклидово пространство является Хаусдорфовым.

Опр 7.6. Замкнутым множеством в топологическом пространстве (X, τ) называется множество M , дополнение которого открыто, т.е. $X \setminus M \in \tau$.

Опр 7.7. Замыканием $\overline{M}$ множества $M \subset X$ называется пересечение всех замкнутых множеств, содержащих M .

Утв 7.1. Совокупность замкнутых множеств топологического пространства (X, τ) обладает следующими свойствами:

1. $X, \emptyset$ — замкнуты.
2. Объединение конечного и пересечение любого числа замкнутых множеств замкнуто.

Опр 7.8. Множество M называется компактным, если из любого его открытого покрытия можно извлечь конечное подпокрытие.

Опр 7.9. Пусть (X, τ) — топологическое пространство. Подсистема τ^* семейства τ называется базой топологии τ , если любые элементы из τ можно представить в виде объединения элементов из τ^* .

Пример 7.5. Базой в нормированном пространстве X с топологией из примера 7.2 является семейство шаров

$$\{B_R(x) \mid R \in \mathbb{R}, x \in X\}$$

Опр 7.10. Пусть задан оператор $A : X \rightarrow Y$. $Ax_0 = y_0$. Оператор A называется непрерывным в x_0 , если для любой окрестности V точки y_0 существует окрестность U точки $x_0 \mid A(U) \subset V$.

Опр 7.11. Последовательность $\{x_n\}$ сходится к точке x_0 в топологическом пространстве (X, τ) , если для любой окрестности U точки x_0 $\exists N = N(U) \mid x_n \in U$ при $n \geq N$.

7.1 Пространства сходимости (Фреше)

Опр 7.12. Сходимостью в множестве X называется совокупность $\mathcal{E}(X)$ последовательностей $\{x_n\}$, для которых выполняются следующие свойства:

1. Каждой последовательности соответствует ровно один элемент $x \in X$;
2. Стационарной последовательности $\{x_n = x\}$ ставится в соответствие x ;
3. Каждой подпоследовательности $\{x_{n_k}\}$ последовательности $\{x_n\}$ ставится в соответствие тот же самый элемент x , что и для $\{x_n\}$.

Элемент x называется пределом.

Обозначение: $\{x_n\} \rightarrow x$ — x ставится в соответствие $\{x_n\}$.

Опр 7.13. Линейное пространство X называется пространством сходимости, если в нем задана сходимость $\mathcal{E}(X)$, для которой выполняются следующие аксиомы:

1. Если $\{x_n\}, \{y_n\} \in \mathcal{E}(X) \mid \{x_n\} \rightarrow x$ и $\{y_n\} \rightarrow y$, то
$$\{x_n + y_n\} \in \mathcal{E}(X) \text{ и } \{x_n + y_n\} \rightarrow x + y$$
2. Если $\lambda \in \mathbb{R}, \{x_n\} \in \mathcal{E}(X) \mid \{x_n\} \rightarrow x$, то
$$\{\lambda x_n\} \in \mathcal{E}(X) \text{ и } \{\lambda x_n\} \rightarrow \lambda x$$

Опр 7.14. Будем говорить, что $\{f_n\} \subset D$ сходится к 0, если:

1. $\text{supp} f_n \subset \overline{B_R(0)}$ для некоторого $R > 0$, где $\text{supp} f$ — замыкание множества точек, в которых $f \neq 0$.
2. $D^\alpha f_n \Rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ (Производные всех порядков стремятся к нулю равномерно).

Опр 7.15. Функция $f(x)$ называется финитной, если $\text{supp} f \subset \overline{B_R(0)}$,

Пример 7.6. Пусть $D = C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ — совокупность всех бесконечно дифференцируемых, финитных в $\mathbb{R}^n$ функций. Пространство D неметризуемо (в том смысле, что не существует метрики, сходимость по которой определяет сходимость в D).

Пример 7.7. Функция Соболева:

$$w_h(x) = \begin{cases} e^{-\frac{h^2}{h^2 - |x|^2}} & \text{если } |x| < h, \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$$

$w_h(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ и не раскладывается в ряд Тейлора.

Опр 7.16. Обобщенной функцией называется произвольный непрерывный линейный функционал над $D = C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$

Опр 7.17. Пусть заданы два пространства сходимости $(X, \mathcal{E}(X))$, $(Y, \mathcal{E}(Y))$. Пусть задан оператор $A: X \rightarrow Y$, $Ax_0 = y_0$.

Оператор A называется непрерывным в x_0 , если $\forall \{x_n\} \in \mathcal{E}(X)$, имеющей своим пределом x_0 , выполняется

$$\{Ax_n\} \in \mathcal{E}(Y) \text{ и } \{Ax_n\} \rightarrow y_0$$

8 Дифференциальное исчисление в нормированных пространствах.

Считаем, что X, Y — банаховы пространства, определён $F : X \rightarrow Y$, и пусть $x_0 \in D(F)$ такая, что существует окрестность $U(x_0) \subset D(F)$.

Опр 8.1. Оператор F называется дифференцируемым по Фреше в точке x_0 оператором, если существует $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ такой, что выполняется

$$F(x) - F(x_0) = A(x - x_0) + \eta(x - x_0), \text{ где } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\|\eta(x - x_0)\|}{\|x - x_0\|} = 0$$

Оператор A называется производной по Фреше в точке x_0 ($F'(x_0) = A$), Ah — дифференциал по Фреше в точке x_0 ($Ah = dF(x_0, h)$).

Свойства производной Фреше:

- 1) Если A линейен, то $A' = A$.
- 2) Если оператор F имеет производную Фреше F' в точке x_0 , то F непрерывен в x_0 .
- 3) $(F + G)'(x_0) = F'(x_0) + G'(x_0)$, если соответствующие производные существуют.

Теорема 8.1. Пусть X, Y, Z — банаховы пространства, $F : X \rightarrow Y$ и $x_0 \in D(F)$ с некоторой окрестностью $U(x_0) \subset D(F)$, $y_0 = F(x_0)$. Пусть $G : Y \rightarrow Z$ и $y_0 \in D(G)$ с некоторой окрестностью $V(y_0) \subset D(G)$.

Тогда, если операторы F и G дифференцируемы в точках x_0 и y_0 соответственно, то

$$G(F)'(x_0) = G'(y_0)F'(x_0)$$

Доказательство. Обозначим $A = F'(x_0)$ и $B = G'(y_0)$. Тогда

$$\begin{aligned} F(x) - F(x_0) &= A(x - x_0) + \eta(x - x_0) \\ \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\|\eta(x - x_0)\|}{\|x - x_0\|} &= 0 \\ G(y) - G(y_0) &= B(y - y_0) + \rho(y - y_0) \\ \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{\|\rho(y - y_0)\|}{\|y - y_0\|} &= 0 \end{aligned}$$

Возьмём x из окрестности x_0 , $y = F(x)$. Поскольку $\exists F'(x_0)$, то F непрерывен в $x_0 \Rightarrow F(x)$ находится в окрестности точки y_0 . Получаем

$$\begin{aligned} G(F(x)) - G(F(x_0)) &= B(F(x) - F(x_0)) + \rho(F(x) - F(x_0)) = \\ &= (BA)(x - x_0) + \delta(x - x_0), \\ \delta(x - x_0) &= B(F(x) - F(x_0)) + \rho(F(x) - F(x_0)) - (BA)(x - x_0) \end{aligned}$$

Рассмотрим

$$\begin{aligned}
\frac{\|\delta(x - x_0)\|}{\|x - x_0\|} &= \frac{\|B(F(x) - F(x_0)) - BA(x - x_0) + \rho(F(x) - F(x_0))\|}{\|x - x_0\|} = \\
&= \frac{\|B(A(x - x_0) + \eta(x - x_0)) - BA(x - x_0) + \rho(F(x) - F(x_0))\|}{\|x - x_0\|} = \\
&= \frac{\|B(\eta(x - x_0)) + \rho(F(x) - F(x_0))\|}{\|x - x_0\|} \leq \\
&\leq \frac{\|B\|\|\eta(x - x_0)\|}{\|x - x_0\|} + \frac{\|\rho(F(x) - F(x_0))\|}{\|x - x_0\|} = \\
&= \frac{\|B\|\|\eta(x - x_0)\|}{\|x - x_0\|} + \frac{\|\rho(y - y_0)\|}{\|y - y_0\|} \cdot \frac{\|F(x) - F(x_0)\|}{\|x - x_0\|} \leq \\
&\leq \underbrace{\|B\|}_{\text{огр.}} \underbrace{\frac{\|\eta(x - x_0)\|}{\|x - x_0\|}}_{\rightarrow 0} + \underbrace{\frac{\|\rho(y - y_0)\|}{\|y - y_0\|}}_{\rightarrow 0} \cdot \left(\underbrace{\|A\|}_{\text{огр.}} + \underbrace{\frac{\|\eta(x - x_0)\|}{\|x - x_0\|}}_{\rightarrow 0} \right) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} 0
\end{aligned}$$

□

Опр 8.2. Оператор F называется непрерывно дифференцируемым в точке x_0 , если существует производная Фреше $F'(x)$ для любого x из некоторой окрестности $U(x_0)$, и эта производная Фреше непрерывна по x в точке x_0 .

Опр 8.3. Пусть M — открытое множество. Оператор F называется непрерывно дифференцируемым на M , если он непрерывно дифференцируем в каждой точке $x \in M$.

Теорема 8.2 (Лагранжа). Пусть F непрерывно дифференцируем в выпуклой окрестности $U(x_0)$. Тогда $\forall x \in U(x_0)$ имеет место равенство

$$F(x) - F(x_0) = \int_0^1 F'(x_0 + \theta(x - x_0))(x - x_0) d\theta$$

Здесь $F'(x_0 + \theta(x - x_0))(x - x_0)$ — функция по θ . Берётся интеграл Римана.

Доказательство. Рассмотрим числовую функцию:

$$\varphi(\theta) = x_0 + \theta(x - x_0)$$

Её производная:

$$\varphi'(\theta) = x - x_0$$

Рассмотрим оператор:

$$\Phi(\theta) = F(\varphi(\theta)) : \mathbb{R} \rightarrow Y$$

Поскольку F и φ дифференцируемы по Фреше, то в соответствии с теоремой 8.1 о производной суперпозиции:

$$\Phi'(\theta) = F'(\varphi(\theta))\varphi'(\theta) = F'(\varphi(\theta))(x - x_0)$$

Интегрируем уравнение от 0 до 1, левую часть получаем по формуле Ньютона-Лейбница.

□

Лемма 8.1. Пусть M — выпуклое открытое множество пространства X , оператор F непрерывно дифференцируем на M и $\|F'(x)\| \leq K \forall x \in M$.

Тогда $\forall x_1, x_2 \in M$ выполняется условие Липшица:

$$\|F(x_1) - F(x_2)\| \leq K\|x_1 - x_2\|$$

Доказательство. Так как M выпукло, то отрезок $[x_1, x_2] \in M$, значит применима формула Лагранжа:

$$F(x_1) - F(x_2) = \int_0^1 F'(x_2 + \theta(x_1 - x_2))(x_1 - x_2)d\theta$$

Возьмём норму слева и справа:

$$\begin{aligned} \|F(x_1) - F(x_2)\| &= \left\| \int_0^1 F'(x_2 + \theta(x_1 - x_2))(x_1 - x_2)d\theta \right\| \leq \\ &\leq \int_0^1 \|F'(x_2 + \theta(x_1 - x_2))(x_1 - x_2)\|d\theta \leq \\ &\leq \int_0^1 \|F'(x_2 + \theta(x_1 - x_2))\| \cdot \|(x_1 - x_2)\|d\theta \leq \\ &\leq \int_0^1 K\|(x_1 - x_2)\|d\theta = K\|(x_1 - x_2)\| \end{aligned}$$

□

Лемма 8.2. Пусть $M \subset X$ — открытое, выпуклое множество, оператор F непрерывно дифференцируем на M , и пусть выполняется условие Липшица для производной:

$$\|F'(x_1) - F'(x_2)\| \leq K\|x_1 - x_2\| \quad \forall x_1, x_2 \in M$$

Тогда имеет место неравенство:

$$\|F(x_1) - F(x_2) - F'(x_2)(x_1 - x_2)\| \leq \frac{K}{2}\|x_1 - x_2\|^2$$

Доказательство. По условию F' непрерывна по x на M . Получаем

$$\begin{aligned} &\|F(x_1) - F(x_2) - F'(x_2)(x_1 - x_2)\| = \\ &= \left\| \int_0^1 F'(x_2 + \theta(x_1 - x_2))(x_1 - x_2)d\theta - \underbrace{F'(x_2)(x_1 - x_2)}_{\text{не зав. от } \theta} \right\| = \\ &= \left\| \int_0^1 [F'(x_2 + \theta(x_1 - x_2)) - F'(x_2)](x_1 - x_2)d\theta \right\| \leq \\ &\leq \int_0^1 \|F'(x_2 + \theta(x_1 - x_2)) - F'(x_2)\| \|x_1 - x_2\|d\theta \leq \\ &\quad (\text{Воспользуемся условием Липшица}) \\ &\leq K\|x_1 - x_2\| \int_0^1 \|x_2 + \theta(x_1 - x_2) - x_2\|d\theta = \\ &= K\|x_1 - x_2\|^2 \int_0^1 \theta d\theta = \frac{K}{2}\|x_1 - x_2\|^2 \end{aligned}$$

□

Лемма 8.3. Пусть X — банахово пространство, множество $M \subset X$ выпукло, замкнуто и ограничено. Пусть задан оператор $F : M \rightarrow M$ и пусть на множестве M оператор F имеет непрерывную по x производную Фреше, причем

$$\|F'(x)\| \leq q < 1 \quad \forall x \in M$$

Тогда оператор F — сжимающий на M .

Доказательство. Необходимо доказать

$$\|F(x_1) - F(x_2)\| \leq q \|x_1 - x_2\|$$

Если x_1 и x_2 — внутренние точки M , то получаем требуемое по формуле Лагранжа. Если хотя бы одна из них лежит на границе, то с помощью предельного перехода:

$$\begin{aligned} x_1^{(n)} &\in \text{int}(M), & x_1^{(n)} &\xrightarrow{n \rightarrow \infty} x_1 \\ x_2^{(n)} &\in \text{int}(M), & x_2^{(n)} &\xrightarrow{n \rightarrow \infty} x_2 \end{aligned}$$

□

Опр 8.4. Пусть $F(x) : X \rightarrow Y$; $U(x_0) \subset D(F)$. Дифференциалом Гато (вариацией) называется предел

$$\delta F(x_0, h) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{F(x_0 + th) - F(x_0)}{t}, \quad t \in \mathbb{R}, \quad h \in X \text{ — фиксированный}$$

если этот предел существует и конечен.

Опр 8.5. Если вариация является линейным, ограниченным по h оператором ($\delta F(x_0, h) = Ah$), то A называется производной Гато в точке x_0 оператора F .

Пример 8.1.

$$f(x, y) = \begin{cases} 1, & y = x^2, \\ 0, & y \neq x^2 \end{cases}$$

У этой функции существует производная по любому направлению в нуле, но $f(x, y)$ не является дифференцируемой.

Замечание 8.1. Если оператор имеет производную Фреше, то он имеет производную Гато.

Теорема 8.3. Пусть в шаре $B_R(x_0)$ оператор F имеет дифференциал Гато $\delta F(x_0, h)$, равномерно непрерывный по $x \in B_R(x_0)$ и равномерно непрерывный по $h \in X$. Тогда оператор F имеет в шаре $B_R(x_0)$ производные Гато и Фреше, причем они совпадают.

Без доказательства.

Следствие 8.1. Если производная Гато существует и непрерывна в некоторой окрестности точки x_0 , то в x_0 существует производная Фреше и она совпадает с производной Гато.

Без доказательства.

9 Метод Ньютона-Канторовича

Пусть K, m, η — некоторые постоянные. Определим

$$q = \frac{1}{2}Km^2\eta;$$

$$R_1 = m\eta \sum_{n=0}^{\infty} q^{2^n-1}.$$

Нетрудно установить, что ряд в выражении для R_1 сходится (считаем, что $q < 1$).

Теорема 9.1 (Ньютона-Канторовича). Пусть X — банахово пространство, задано число $R > R_1$, и пусть на шаре $B_R(x_0)$ определён оператор $F(x)$, удовлетворяющий следующим условиям

1. $F(x)$ непрерывно дифференцируем в $B_R(x_0)$
2. $\|F(x_0)\| \leq \eta$
3. $\|F'(x_1) - F'(x_2)\| \leq K\|x_1 - x_2\| \quad \forall x_1, x_2 \in B_R(x_0)$
4. Оператор $[F'(x)]^{-1}$ существует и непрерывен в $B_R(x_0)$, причём

$$\|[F'(x)]^{-1}\| \leq m$$

5. $q = \frac{1}{2}Km^2\eta < 1$

Тогда $\exists x^* \in \overline{B_{R_1}}(x_0) \mid F(x^*) = 0$.

Доказательство. Построим последовательность $\{x_n\}$ следующим образом:

$$x_n = x_{n-1} - [F'(x_{n-1})]^{-1} F(x_{n-1})$$

Заметим, что $[F'(x_{n-1})]^{-1}$ линеен (по определению производной Фреше).

Покажем, что $x_1 \in B_{R_1}(x_0)$

$$\|x_1 - x_0\| = \|[F'(x_0)]^{-1} F(x_0)\| \leq m\eta \leq R_1$$

Имеем

$$x_1 - x_0 = -[F'(x_0)]^{-1} F(x_0)$$

Применим оператор $F'(x_0)$ к обеим частям равенства

$$F'(x_0)(x_1 - x_0) + F(x_0) = 0$$

Получаем

$$\begin{aligned} \|F(x_1)\| &= \|F(x_1) - \underbrace{(F(x_0) + F'(x_0)(x_1 - x_0))}_{=0}\| = \\ &= \|F(x_1) - F(x_0) - F'(x_0)(x_1 - x_0)\| \leq (\text{лемма 8.2}) \leq \frac{K}{2}\|x_1 - x_0\|^2 \end{aligned}$$

Докажем с помощью математической индукции, что

$$\begin{aligned}\|x_n - x_{n-1}\| &\leq m\eta q^{2^{n-1}-1} \\ \|F(x_n)\| &\leq \frac{K}{2}\|x_n - x_{n-1}\|^2\end{aligned}$$

База индукции ($n = 1$) выполняется — как показано выше, верны оба неравенства. Предположим, что для n оба неравенства выполняются. Необходимо показать для $n + 1$:

$$\begin{aligned}\|x_{n+1} - x_n\| &\leq m\eta q^{2^n-1} \\ \|F(x_{n+1})\| &\leq \frac{K}{2}\|x_{n+1} - x_n\|^2\end{aligned}$$

Имеем

$$\begin{aligned}x_{n+1} - x_n &= -[F'(x_n)]^{-1} F(x_n) \\ \|x_{n+1} - x_n\| &= \|[F'(x_n)]^{-1} F(x_n)\| \leq m\|F(x_n)\| \leq \\ &\leq_{\left(\begin{smallmatrix} \text{предположение} \\ \text{индукции} \end{smallmatrix}\right)} m\frac{K}{2}\|x_n - x_{n-1}\|^2 \leq_{\left(\begin{smallmatrix} \text{предположение} \\ \text{индукции} \end{smallmatrix}\right)} \frac{K}{2}m^3\eta^2q^{2^n-2} = \\ &= m\eta\underbrace{\left(\frac{1}{2}m^2\eta K\right)}_{=q}q^{2^n-2} = m\eta q^{2^n-2+1} = m\eta q^{2^n-1}\end{aligned}$$

Имеем

$$x_{n+1} - x_n = -[F'(x_n)]^{-1} F(x_n)$$

Применим оператор $F'(x_n)$ к обеим частям равенства

$$F'(x_n)(x_{n+1} - x_n) + F(x_n) = 0$$

Получаем

$$\begin{aligned}\|F(x_{n+1})\| &= \|F(x_{n+1}) - \underbrace{(F(x_n) + F'(x_n)(x_{n+1} - x_n))}_{=0}\| = \\ &= \|F(x_{n+1}) - F(x_n) - F'(x_n)(x_{n+1} - x_n)\| \leq \\ &\leq (\text{лемма 8.2}) \leq \frac{K}{2}\|x_{n+1} - x_n\|^2\end{aligned}$$

Таким образом, показали, что неравенства верны $\forall n \in \mathbb{N}$.

Покажем, что $x_{n+1} \in \overline{B_{R_1}}(x_0)$. Рассмотрим

$$\begin{aligned}\|x_{n+1} - x_0\| &= \|x_{n+1} - x_n + x_n - x_{n-1} + \dots + x_1 - x_0\| \leq \\ &\leq \|x_{n+1} - x_n\| + \dots + \|x_1 - x_0\| \leq m\eta q^{2^n-1} + \dots + m\eta q^{2^0-1} = \\ &= m\eta \sum_{i=0}^n q^{2^i-1} \leq m\eta \sum_{i=0}^{\infty} q^{2^i-1} = R_1\end{aligned}$$

Докажем, что элементы x_n образуют фундаментальную последовательность. Рассмотрим

$$\begin{aligned}\|x_{n+p} - x_n\| &= \|x_{n+p} - x_{n+p-1} + x_{n+p-1} - x_{n+p-2} + \dots + x_{n+1} - x_n\| \leq \\ &\leq \|x_{n+p} - x_{n+p-1}\| + \dots + \|x_{n+1} - x_n\| \leq m\eta \sum_{i=n}^{n+p} q^{2^i-1}\end{aligned}$$

Ряд $\sum_{i=0}^{\infty} q^{2^i-1}$ сходится, следовательно, по критерию Коши

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon) \mid \forall n \geq N, \forall p > 0 :$$

$$\sum_{i=n}^{n+p} q^{2^i-1} < \frac{\varepsilon}{m\eta}$$

Получаем, что $\{x_n\}$ фундаментальна, следовательно, т.к. X — банахово пространство, $\{x_n\}$ сходится, т.е.

$$\exists x^* \mid x^* = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$$

Очевидно, что $x^* \in \overline{B_{R_1}}(x_0)$. Имеем

$$x_n = x_{n-1} - [F'(x_{n-1})]^{-1} F(x_{n-1})$$

Согласно 4 пункту теоремы $[F'(x)]^{-1}$ существует и непрерывен, следовательно, можно перейти к пределу:

$$\begin{aligned} x^* &= x^* - [F'(x^*)]^{-1} F(x^*) \Rightarrow \\ &\Rightarrow [F'(x^*)]^{-1} F(x^*) = 0 \end{aligned}$$

Поскольку $[F'(x^*)]^{-1}$ взаимно однозначен, то получаем

$$[F'(x^*)]^{-1} F(x^*) = 0 \Leftrightarrow F(x^*) = 0$$

Оценим скорость сходимости

$$\begin{aligned} \|x^* - x_n\| &\leq m\eta \sum_{i=n}^{\infty} q^{2^i-1} = m\eta (q^{2^n-1} + q^{2^{n+1}-1} + \dots) = \\ &= m\eta q^{2^n-1} [1 + q^{2^{n+1}-2^n} + q^{2^{n+2}-2^n} + \dots] \end{aligned}$$

Известно неравенство $2^s - 1 \geq s$ для натуральных s . Отсюда

$$q^{2^{n+s}-2^n} = q^{2^n(2^s-1)} \leq (q < 1) \leq q^{s2^n}$$

Получаем

$$\|x^* - x_n\| \leq m\eta q^{2^n-1} \sum_{s=0}^{\infty} q^{s2^n} \leq \frac{m\eta}{1 - q^{2^n}} \cdot q^{2^n-1}$$

□

Теорема 9.2 (Канторовича). Пусть X — банахово пространство. Определим

$$R_2 = \frac{1 - \sqrt{1 - 2m^2 K \eta}}{mK}$$

Пусть $R > R_2$, и пусть на шаре $B_R(x_0)$ определён оператор $F(x)$, удовлетворяющий следующим условиям

1. $F(x)$ непрерывно дифференцируем в $B_R(x_0)$

$$2. \|F(x_0)\| \leq \eta$$

$$3. \|F'(x_1) - F'(x_2)\| \leq K\|x_1 - x_2\| \quad \forall x_1, x_2 \in B_R(x_0)$$

4. Оператор $[F'(x_0)]^{-1}$ существует и непрерывен в $B_R(x_0)$, причём

$$\|[F'(x_0)]^{-1}\| \leq m$$

$$5. 2m^2K\eta < 1$$

Тогда $\exists x^* \in \overline{B_{R_2}}(x_0) \mid F(x^*) = 0$.

Доказательство. Построим последовательность $\{x_n\}$ следующим образом:

$$x_n = x_{n-1} - [F'(x_0)]^{-1} F(x_{n-1})$$

Определим оператор

$$\Phi(x) = x - [F'(x_0)]^{-1} F(x)$$

Докажем, что Φ переводит $\overline{B_{R_2}}(x_0)$ в себя и является сжимающим. Пусть $x \in \overline{B_{R_2}}(x_0)$. Рассмотрим

$$\begin{aligned} \|\Phi(x) - x_0\| &= \|x - x_0 - [F'(x_0)]^{-1} F(x)\| = \\ &= \|[F'(x_0)]^{-1} (F'(x_0)(x - x_0) - F(x))\| = \\ &= \|[F'(x_0)]^{-1} (F(x) - F(x_0) - F'(x_0)(x - x_0) + F(x_0))\| \leq \\ &\leq \|[F'(x_0)]^{-1} (F(x) - F(x_0) - F'(x_0)(x - x_0))\| + \|[F'(x_0)]^{-1} F(x_0)\| \leq \\ &\leq (\text{по лемме 8.2}) \leq m \frac{K}{2} \|x - x_0\|^2 + m \|F(x_0)\| \leq \frac{mK}{2} R_2^2 + m\eta = \\ &= \frac{mK}{2} \cdot \frac{1 + 1 - 2m^2K\eta - 2\sqrt{1 - 2m^2K\eta}}{m^2K^2} + m\eta = \\ &= \frac{1 - m^2K\eta - \sqrt{1 - 2m^2K\eta}}{mK} + m\eta = \frac{1 - \sqrt{1 - 2m^2K\eta}}{mK} = R_2 \end{aligned}$$

Получили, что Φ переводит $\overline{B_{R_2}}(x_0)$ в себя. Имеем

$$\Phi = I - [F'(x_0)]^{-1} F$$

$$\text{по теореме 8.1} \Rightarrow \Phi'(x) = I - [F'(x_0)]^{-1} F'(x)$$

Оценим

$$\begin{aligned} \|\Phi'(x)\| &= \|I - [F'(x_0)]^{-1} F'(x)\| = \|[F'(x_0)]^{-1} (F'(x_0) - F'(x))\| \leq \\ &\leq m \|F'(x_0) - F'(x)\| \leq mK \|x - x_0\| \leq mKR_2 = 1 - \sqrt{1 - 2m^2K\eta} < 1 \end{aligned}$$

По лемме 8.3 получаем, что Φ — сжимающий, следовательно, существует единственная неподвижная точка $x^* \in \overline{B_{R_2}}(x_0) \mid x^* = \Phi(x^*)$. Получаем

$$x^* = \Phi(x^*) = x^* - [F'(x_0)]^{-1} F(x^*) \Rightarrow [F'(x_0)]^{-1} F(x^*) = 0$$

Поскольку $[F'(x_0)]^{-1}$ взаимно однозначен, то

$$[F'(x_0)]^{-1} F(x^*) = 0 \Leftrightarrow F(x^*) = 0$$

□

Следствие 9.1. Известно, что скорость сходимости в методе последовательных приближений для сжимающих операторов

$$\|x_n - x^*\| \leq \frac{q^n}{1 - q} \|\Phi(x_0) - x_0\| \leq m\eta \frac{q^n}{1 - q}, \text{ где } q = mKR_2.$$

Замечание 9.1. Чем ближе мы попадём начальным приближением x_0 к x^* (т.е. чем меньше η), тем больше будет скорость сходимости.

10 Решения

Упражнение. 1.1 (страница 5)

($\Leftarrow$) Пусть линейный оператор A ограничен и пусть $\{x_n\}$ — последовательность элементов из X ($\forall n : x_n \in X$) такая, что $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

Тогда $\exists M > 0 \mid \|Ax_n\| \leq M\|x_n\| \Rightarrow Ax_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$

($\Rightarrow$) Пусть A непрерывен. Докажем, что он ограничен.

Пусть это не так, тогда $\exists \{x_n\} \mid \|Ax_n\| > n\|x_n\|$ (здесь $M = n$).

Определим $y_n = \frac{x_n}{n\|x_n\|}$ ($n\|x_n\| \neq 0$, иначе $Ax_n = 0$, что противоречит $\|Ax_n\| > n\|x_n\|$).

Имеем:

$$y_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0, \text{ т.к. } \|y_n - 0\| = \left\| \frac{x_n}{n\|x_n\|} \right\| = \frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Тогда согласно непрерывности оператора A последовательность $\{Ay_n\}$ должна сходиться к 0. Проверяем:

$$\|Ay_n\| = \left\| A \left(\frac{x_n}{n\|x_n\|} \right) \right\| = \frac{1}{n\|x_n\|} \|Ax_n\| > 1$$

Пришли к противоречию, следовательно, оператор A ограничен.

Упражнение. 1.2 (страница 5)

1. Имеем $\|Ax\| \leq \|A\|\|x\| \forall x \in X \Rightarrow \sup_{\|x\|=1} \|Ax\| \leq \|A\|$ (*)

С другой стороны, из определения точной нижней грани:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists x_\varepsilon \in X, x_\varepsilon \neq 0 \mid \|Ax_\varepsilon\| \geq (\|A\| - \varepsilon)\|x_\varepsilon\|$$

$$\text{Пусть } y_\varepsilon = \frac{x_\varepsilon}{\|x_\varepsilon\|}, \text{ тогда } \|Ay_\varepsilon\| = \frac{1}{\|x_\varepsilon\|} \|Ax_\varepsilon\| \geq \|A\| - \varepsilon$$

Для некоторого элемента это верно, следовательно:

$$\sup_{\|x\|=1} \|Ax\| \geq \|A\| - \varepsilon \Rightarrow \sup_{\|x\|=1} \|Ax\| \geq \|A\| \quad (**)$$

Из (*) и (**) следует требуемое.

2. Пусть $x \in X, x \neq 0, y = \frac{x}{\|x\|}$. Тогда

$$\|A\| = \sup_{\|x\|=1} \|Ay\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$$

Упражнение. 1.3 (страница 8)

Необходимо доказать, что $|\rho(x_n, y_n) - \rho(x_m, y_m)| \leq \rho(x_n, x_m) + \rho(y_n, y_m)$. Покажем это:

$$\begin{aligned} \rho(x_n, y_n) &\leq \rho(x_n, x_m) + \rho(x_m, y_m) + \rho(y_m, y_n); \\ \rho(x_n, y_n) - \rho(x_m, y_m) &\leq \rho(x_n, x_m) + \rho(y_m, y_n) \quad (*) \end{aligned}$$

С другой стороны:

$$\begin{aligned} \rho(x_m, y_m) &\leq \rho(x_m, x_n) + \rho(x_n, y_n) + \rho(y_n, y_m); \\ \rho(x_m, y_m) - \rho(x_n, y_n) &\leq \rho(x_m, x_n) + \rho(y_n, y_m) \quad (***) \end{aligned}$$

$$\text{Из } (*) \text{ и } (***) \Rightarrow |\rho(x_n, y_n) - \rho(x_m, y_m)| \leq \rho(x_n, x_m) + \rho(y_n, y_m)$$

Упражнение. 1.4 (страница 8) Доказать, что ρ_1 — метрика.

- Поскольку ρ является метрикой, то

$$\rho(x_n, y_n) \geq 0 \Rightarrow \rho_1(x^*, y^*) = \lim_{n \rightarrow \infty} \rho(x_n, y_n) \geq 0.$$

Т.е. получили, что ρ_1 отображает в $\mathbb{R}_+$.

- $\rho_1(x_n, y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \rho(x_n, y_n) = 0$. Это означает, что последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ эквивалентны, следовательно, они принадлежат одному и тому же классу эквивалентности, т.е. $x^* = y^*$.
- $\rho_1(x^*, y^*) = \rho_1(y^*, x^*)$ — очевидно.
- Если $\{x_n\} \in x^*$, $\{y_n\} \in y^*$, $\{z_n\} \in z^*$, то:

$$\begin{aligned} \rho_1(x^*, z^*) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \rho(x_n, z_n) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} (\rho(x_n, y_n) + \rho(y_n, z_n)) = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \rho(x_n, y_n) + \lim_{n \rightarrow \infty} \rho(y_n, z_n) = \rho_1(x^*, y^*) + \rho_1(y^*, z^*) \end{aligned}$$

Упражнение. 2.1 (страница 17) Доказать линейность обратного оператора.

1. Пусть $x = A^{-1}(y_1 + y_2) - A^{-1}y_1 - A^{-1}y_2$. Тогда:

$$\begin{aligned} Ax &= AA^{-1}(y_1 + y_2) - AA^{-1}y_1 - AA^{-1}y_2 = (y_1 + y_2) - y_1 - y_2 = 0 \\ x &= (A^{-1}A)x = A^{-1}(Ax) = A^{-1}0 = 0 \\ \Rightarrow A^{-1}(y_1 + y_2) &= A^{-1}y_1 + A^{-1}y_2 \end{aligned}$$

2. Пусть $x = A^{-1}(ay) - aA^{-1}y$, где $a - \text{const}$. Тогда:

$$\begin{aligned} Ax &= AA^{-1}(ay) - aAA^{-1}y = (ay) - ay = 0 \\ x &= (A^{-1}A)x = A^{-1}(Ax) = A^{-1}0 = 0 \\ \Rightarrow A^{-1}(ay) &= aA^{-1}y \end{aligned}$$

Упражнение. 2.2 (страница 18) Доказать обратимость оператора.

Имеем:

$$\forall y \in Y \exists x \in X \mid Ax = y$$

Согласно этому строим соответствие (обозначим его через A^{-1}):

$$A^{-1} : y \rightarrow x$$

В силу инъективности оператора A данное соответствие является отображением.

Упражнение. 3.1 (страница 27)

- 1) Слабый предел определён единственным образом.

Пусть $x_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{слаб}} x_0$ и $x_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{слаб}} y_0$. Тогда $\forall f \in X^*$:

$$f(x_n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} f(x_0) \text{ и } f(x_n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} f(y_0)$$

Отсюда: $f(x_0) = f(y_0) \Rightarrow f(x_0 - y_0) = 0 \quad \forall f$.

С другой стороны, по предположению $x_0 \neq y_0 \Rightarrow x_0 - y_0 \neq 0$. Тогда по следствию 3.1 $\exists f_0 \mid f_0(x_0 - y_0) = \|x_0 - y_0\| \neq 0$

Противоречие, следовательно, $x_0 = y_0$.

2) Если последовательность $\{x_n\}$ слабо сходится к x_0 , то любая её подпоследовательность слабо сходится к x_0 .

Пусть $x_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{слаб}} x_0$. Тогда $\forall f \in X^* : f(x_n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} f(x_0)$. По свойству сходимости числовых последовательностей получаем:

$$f(x_{n_k}) \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} f(x_0) \Rightarrow x_{n_k} \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{\text{слаб}} x_0$$

3) Любая сильно (по норме) сходящаяся последовательность является слабо сходящейся.

Пусть $x_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} x_0$ сильно. Выберем произвольный $f \in X^*$. Рассмотрим:

$$|f(x_n) - f(x_0)| = |f(x_n - x_0)| \leq \|f\| \cdot \|x_n - x_0\| \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$$

Следовательно, $x_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{слаб}} x_0$.

4) В конечномерном пространстве: сильная $\equiv$ слабая.

Пусть $x_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{слаб}} x_0$ и пусть X конечномерно. Тогда $\exists m \mid \{e_k\}_{k=1}^m$ — базис, т.е.

$$x_n = \sum_{k=1}^m \lambda_k^{(n)} e_k \quad x_0 = \sum_{k=1}^m \lambda_k^{(0)} e_k$$

Рассмотрим $\{f_i\} \subset X^*$ такие, что $f_i(e_j) = \delta_i^j$. Тогда

$$f_i(x_n) = \lambda_i^{(n)}, \quad f_i(x_0) = \lambda_i^{(0)} \quad \forall i = 1 \dots m$$

Получаем:

$$\begin{aligned} x_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{слаб}} x_0 &\Rightarrow f(x_n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} f(x_0) \quad \forall f \in X^* \Rightarrow \\ &\Rightarrow f_i(x_n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} f_i(x_0) \quad \forall i, \quad \text{т.е.} \quad \lambda_i^{(n)} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \lambda_i^{(0)} \quad \forall i \end{aligned}$$

Но в конечномерном пространстве покомпонентная сходимость влечёт за собой сходимость по норме, следовательно, $x_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} x_0$ сильно.

Упражнение. 4.1 (страница 31)

1) Ограниченность функционала сверху (снизу — аналогично).

Докажем от противного. Пусть $\exists \{x_n\} \mid f(x_n) > n \quad \forall n$.

Множество M компактно, следовательно

$$\exists \{x_{n_k}\} \subset \{x_n\} \mid x_{n_k} \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} x_0 \in M$$

Тогда, с одной стороны, $f(x_{n_k}) > n_k$, т.е. $f(x_{n_k}) \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} \infty$.

С другой стороны, т.к. f непрерывен, то $f(x_{n_k}) \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} f(x_0)$. Пришли к противоречию, следовательно, f ограничен сверху.

2) Достижимость наибольшего значения (достижимость наименьшего значения показывается аналогично).

Определим

$$m = \sup_{x \in M} f(x)$$

По определению точной верхней грани получаем:

$$\begin{aligned} f(x) &\leq m \quad \forall x \in M \\ \forall \varepsilon > 0 \exists x_\varepsilon \mid f(x_\varepsilon) &> m - \varepsilon \end{aligned}$$

Следовательно, существует такая последовательность $\{x_n\}$, что

$$m - \frac{1}{n} < f(x_n) \leq m$$

Множество M компактно, следовательно

$$\exists \{x_{n_k}\} \subset \{x_n\} \mid x_{n_k} \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} x_0 \in M$$

Тогда

$$\begin{aligned} m - \frac{1}{n_k} < f(x_{n_k}) \leq m &\Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} f(x_{n_k}) = m \\ f \text{ непрерывен} &\Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} f(x_{n_k}) = f(x_0) \Rightarrow f(x_0) = m \end{aligned}$$

Упражнение. 4.2 (страница 31) Необходимо доказать, что относительно компактное множество M компактно $\Leftrightarrow M$ замкнуто.

($\Rightarrow$) Пусть M компактно, тогда по утверждению 4.1 M замкнуто.

($\Leftarrow$) Пусть $\{x_n\} \subset M$. Т.к. M относительно компактно, то существует сходящаяся подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$.

Множество M замкнуто, следовательно, $x_{n_k} \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} x_0 \in M$, что означает, что множество M компактно.

Упражнение. 4.3 (страница 32) Необходимо доказать относительную компактность множества M .

По условию

$$\forall \varepsilon > 0 \exists M_{\frac{\varepsilon}{2}}^o \text{ — относительно компактная } \frac{\varepsilon}{2}\text{—сеть для } M.$$

По теореме 4.3 существует $M_{\frac{\varepsilon}{2}}^o$ — конечная $\frac{\varepsilon}{2}$ —сеть для $M_{\frac{\varepsilon}{2}}^o$. Тогда $M_{\frac{\varepsilon}{2}}^o$ является конечной ε —сетью для M , т.к.

$$\begin{aligned} \forall x \in M \exists x_1 \in M_{\frac{\varepsilon}{2}}^o \mid \|x - x_1\| &< \frac{\varepsilon}{2} \\ \text{Для } x_1 \exists x_2 \in M_{\frac{\varepsilon}{2}}^o \mid \|x_1 - x_2\| &< \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned}$$

В итоге получаем

$$\forall x \in M \exists x_2 \in M_{\frac{\varepsilon}{2}}^o \mid \|x - x_2\| < \varepsilon$$

Таким образом, $M_{\frac{\varepsilon}{2}}^o$ — конечная ε —сеть для M . По теореме 4.3 множество M является относительно компактным.

Упражнение. 4.4 (страница 32) Необходимо доказать сепарабельность относительно компактного множества M .

Рассмотрим последовательность $\{\varepsilon_n\} \mid \varepsilon_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$. В силу теоремы 4.3 построим для $\forall \varepsilon_n$ конечную ε_n -сеть M_n для множества M .

Определим

$$M' = \bigcup_{i=1}^{\infty} M_n - \text{счётное подмножество } M$$

Имеем

$$\forall \varepsilon > 0 \forall x \in M \exists n \in \mathbb{N} \mid \varepsilon_n < \varepsilon \text{ и } \exists x_n \in M_n \subset M' \mid \|x - x_n\| < \varepsilon_n$$

Т.е. другими словами

$$\overline{M'} \supseteq M$$

Таким образом, построено счётное всюду плотное подмножество множества M , следовательно, M сепарабельно.

Упражнение. 4.7 (страница 38) Необходимо доказать, что всякое компактное множество в бесконечномерном нормированном пространстве является нигде не плотным.

Пусть $M \subset X$, X — нормированное пространство, M компактно в X .

Докажем от противного: пусть M не является нигде не плотным в X . Тогда

$$\exists B_R(x_0) \mid \forall B_{R_1}(x_1) \subset B_R(x_0) : B_{R_1}(x_1) \cap M \neq \emptyset$$

Пусть $x^* \in B_R(x_0)$. Определим

$$R_n = \frac{R - \|x^* - x_0\|}{n}$$

Рассмотрим $B_{R_n}(x^*)$. Пусть $x \in B_{R_n}(x^*)$

$$\begin{aligned} \|x - x_0\| &\leq \|x - x^*\| + \|x^* - x_0\| \leq \frac{R - \|x^* - x_0\|}{n} + \|x^* - x_0\| < R \\ &\Rightarrow B_{R_n}(x^*) \subset B_R(x_0) \end{aligned}$$

Согласно предположению

$$\exists x_n : x_n \in B_{R_n}(x^*) \cap M$$

$$\begin{aligned} R_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 &\Rightarrow x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x^* \Rightarrow x^* \in \overline{M} \Rightarrow (\text{т.к. } x^* \text{ произвольный}) \Rightarrow \\ &\Rightarrow B_R(x_0) \subset \overline{M} \Rightarrow \overline{B_R(x_0)} \subset \overline{M} \end{aligned}$$

M компактно $\Rightarrow M = \overline{M} \Rightarrow \overline{B_R(x_0)}$ — замкнутое подмножество компактного множества $\Rightarrow \overline{B_R(x_0)}$ компактно в силу теоремы 4.4. Пришли к противоречию с утв. 4.4. Получаем, что M — нигде не плотно.

Упражнение. 4.8 (страница 38) Необходимо доказать, что всякое рефлексивное пространство является слабо полным.

Пусть $\{x_n\}$ слабо сходится. Тогда числовая последовательность $f(x_n)$ сходится $\forall f \in X^*$. По теореме 4.7 существует подпоследовательность

$$\{x_{n_k}\} \mid x_{n_k} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} x_0; x_0 \in X^{**}$$

Так как X рефлексивное, то $X^{**} = X \Rightarrow x_0 \in X \Rightarrow X$ — слабо полное.